MAYORIAS, MINORIAS, MITADES Y OTRAS COSAS

por

JULIO GARCIA PRADILLO

SÍNTESIS

Un problema de lenguaje que exige la resolución de un problema matemático.—Unas definiciones del Diccionario de la Lengua Española.—Definiciones basadas en la teoría de conjuntos.—Número de mayorías y de minorías de un conjunto finito.—Número de mitades de un conjunto par.—Número de tercios de un conjunto de $3m$ elementos.—Numero de enésimas partes de un conjunto de mn elementos.—Solución al problema de lenguaje.—Tabla del número de mayorías de un conjunto finito en función de su número de elementos.—Una propiedad de la función natural $M(n)$ que da el número de mayorías de un conjunto en función de su número de elementos.—Número de particiones de un conjunto en mitades, tercios, ..., enésimas partes, cuando existen.—Número de particiones ordenadas en mitades, tercios, enésimas partes.—Ejercicios de aplicación.

UN PROBLEMA DE LENGUAJE QUE EXIGE LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO.

Pueden leerse u oirse con frecuencia frases. tales como las siguientes:

1. «La *mayoria* de los españoles son católicos.»
2. «La *mayoria* demócrata del senado votó a favor.»
2. «Los alborotadores fueron la *minoria.*»
4. «Hay una *mitad* de los españoles que no se resignan a morir.» (Calvo Sotelo.)
5. «Se cayó la bandeja y se rompieron la *mitad* de las tazas.»
6. «La *mitad* de delante que den un paso al frente, y la *mitad* de detrás que den un paso atrás.»
7. «El *tercio* de vosotros que entre de servicio el sábado.» (De una traducción de la Biblia.)

En ellas aparecen los términos *mayoria, minoria, mitad* y *tercio,* sobre los que queremos reflexionar para decidir si están bien usados los artículos (determinados en la 1-2-3-5-6-7 e indeterminado en la 4).

Para ello tenemos que plantearnos el problema matemático:

¿Cuántas mayorias tiene un conjunto finito?, y los análogos relativos a *minorias, medios* y *tercios.*

Si cualquier conjunto tuviera una sola mayoría habría que utilizar siempre el artículo determinado. Por el contrario, si hubiera conjuntos con varias mayorías, al menos para ellos, habría que utilizar el artículo indeterminado, salvo en los casos en que al substantivo (mayoría, minoría, mitad, tercio) siga un adjetivo determinante.

Veamos para ello, respecto a dichos términos:

Las definiciones del Diccionario de la Lengua Española.

Mayoria (4.ª acepción).—Parte mayor de los individuos que componen una nación, ciudad o cuerpo.

Minoria (3.ª acepción).—Parte menor de los individuos que componen una nación, ciudad o cuerpo.

Mitad.—Cada una de las dos partes iguales en que se divide un todo.

Tercio.—Cada una de las tres partes iguales en que se divide un todo.

Pero la teoría de conjuntos nos permite dar unas definiciones más rigurosas y precisas:

Definiciones basadas en la teoría de conjuntos

Utilizaremos, en parte, las relaciones «ser plusvalente que» y «ser minusvalente que» en el siguiente sentido:

«Un conjunto A se dice que es $\left\{ \begin{matrix} \text{plusvalente} \\ \text{minusvalente} \end{matrix} \right\}$ que otro B si $\left\{ \begin{matrix} B \\ A \end{matrix} \right\}$ es coordinable con una parte estricta de $\left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\}$".

Y escribiremos, respectivamente, $\left\{ \begin{matrix} A \succ B \\ A \prec B \end{matrix} \right\}$.

Basados en las anteriores definiciones, definimos ahora:

«Un subconjunto, S, de un conjunto finito, C. se dice que es una $\left\{ \begin{matrix} \textit{mayoria} \\ \textit{minoria} \end{matrix} \right\}$ de éste, si y sólo si es $\left\{ \begin{matrix} \textit{plusvalente} \\ \textit{minusvalente} \end{matrix} \right\}$ que su complementario respecto al conjunto.»

Es decir,

$$\text{S es una mayoría de C} \iff S > \mathscr{C}_C S$$

$$\text{S es una minoría de C} \iff S < \mathscr{C}_C S$$

Por supuesto que podríamos definir también:

«Un subconjunto, S, de un conjunto finito, C, se dice que es una $\left\{ \begin{matrix} \textit{mayoría} \\ \textit{minoría} \end{matrix} \right\}$ de éste, si y sólo si S tiene un número cardinal $\left\{ \begin{matrix} \textit{mayor} \\ \textit{menor} \end{matrix} \right\}$ que $\mathscr{C}_C S$.»

Por otra parte, definimos:

«Un subconjunto, S, de un conjunto finito y par, C, se dice que es una *mitad* de C, si S es coordinable con $\mathscr{C}_C S$.»

«Un subconjunto, S, de un conjunto finito, C, de número cardinal múltiplo de 3, decimos que es un *tercio* de éste, si existe alguna tripartición de C, en partes coordinables entre sí, una de las cuales sea S.»

Generalizando, se puede definir:

«Un conjunto, S, se dice que es una *enésima parte* de otro C, finito y de número cardinal múltiplo de n, si existe alguna ene-partición de C en partes coordinables entre sí, una de las cuales sea S.»

Teniendo en cuenta las anteriores definiciones, podemos hallar los números de mayorías, minorías, mitades, tercios, y enésimas partes de un conjunto finito.

NÚMERO DE MAYORÍAS DE UN CONJUNTO FINITO, DE n elementos.

Primer caso. *Si* n *es par,* y *es* n = 2p. el número de mayorías que designaremos por M(n) es:

$$M(n) = \binom{2p}{p+1} + \binom{2p}{p+2} + \ldots + \binom{2p}{2p} =$$

$$= \sum_{i=p+1}^{2p} \binom{2p}{i} = \frac{2^{2p} - \binom{2p}{p}}{2} = \frac{2^n - \binom{n}{n/2}}{2}$$

Segundo caso. Si n es impar y es $n = 2p + 1$

$$M(n) = \binom{2p+1}{p+1} + \binom{2p+1}{p+2} + \ldots\ldots + \binom{2p+1}{2p+1} =$$

$$= \sum_{i=p+1}^{i=2p+1} \binom{2p+1}{i} = \frac{2^{2p+1}}{2} = 2^{2p} = 2^{n-1}$$

NÚMERO DE MINORÍAS DE UN CONJUNTO FINITO.

Como en cualquier conjunto finito, el complementario de una mayoría es una minoría, y recíprocamente, hay tantas minorías como mayorías.

NÚMERO DE MITADES DE UN CONJUNTO PAR.

Si un conjunto finito par tiene n elementos, su número de mitades es:

$$\binom{n}{n/2}$$

NÚMERO DE TERCIOS DE UN CONJUNTO DE NÚMERO DE ELEMENTOS NÚLTRIPLO DE TRES.

Si un conjunto tiene un número de elementos n múltiplo de 3, su número de tercios es

$$\binom{n}{n/3}$$

NÚMERO DE ENÉSIMAS PARTES DE UN CONJUNTO DE NÚMERO DE ELEMENTOS DE MÚLTIPLO de m.

Si n es múltiplo de m, el número de emásimas de un conjunto de n elementos es

$$\binom{n}{n/m}$$

Ejemplos:

Número de elementos	Número de mayorías	Número de minorías	Número de mitades	Número de tercios	Número de cuartos
6	$\dfrac{2^6-\binom{6}{3}}{2}=22$	22	$\binom{6}{3}=20$	$\binom{6}{2}=15$	0
8	$\dfrac{2^8-\binom{8}{4}}{2}=93$	93	$\binom{8}{4}=70$	0	$\binom{8}{2}=28$
9	$2^8=256$	256	0	$\binom{9}{3}=84$	0
1	1	1	0	0	0
2	1	1	2	0	0

Es fácil ver que todo conjunto finito de más de dos elementos tiene más de una mayoría (e igual número de minorías). En cuanto a mitades, tercios, ... , enésimas partes siempre hay varias o ninguna. Resulta, pues, la siguiente:

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE LENGUAJE.

Solo en conjuntos de uno o dos elementos cabe hablar de «la mayoría» o «la minoría». En los demás casos hay que utilizar el artículo indeterminado, salvo que se añada algún adjetivo determinantes, o nos refiramos a alguna mayoría o minoría citada previamente. En cuanto a las palabras «mitad», «tercio», ... , «enésima parte», hay que acompañarlas del artículo indeterminado, salvo que se añada algún adjetivo determinante, o nos refiramos a algún subconjunto citado antes

Así, pues, en las frases 2, 4 y 6 el artículo está utilizado debidamente, lo que no ocurre en las 1, 3, 5 y 7, en las cuales se debía haber utilizado el artículo indeterminado.

Para sacar alguna consecuencia más de este elemental trabajo, hemos construido la siguiente

TABLA DEL NÚMERO DE MAYORÍAS DE UN CONJUNTO FINITO EN FUNCIÓN DE SU NÚMERO DE ELEMENTOS.

Si designamos por $M(n)$ el número de mayorías de un conjunto de n elementos, se tiene:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 ....
$M(n)$	1	1	4	5	16	22	64	93	256	386	1024	1586	4096 ....

En la anterior tabla se observa que, por lo menos, para los primeros términos la sucesión $M(n)$ es no decreciente, como era de suponer, pero puede demostrarse que la propiedad es cierta en general:

UNA PROPIEDAD DE LA FUNCIÓN NATURAL $M(n)$ QUE DA EL NÚMERO DE MAYORÍAS DE UN CONJUNTO EN FUNCIÓN DE SU NÚMERO DE ELEMENTOS

Veamos que, en efecto, la función $M(n)$ es *no decreciente*. Basta ver que si cierto conjunto, S, es una mayoría de un conjunto C, el conjunto $S' = S \cup \{e\}$, con $e \notin C$, es una mayoría del conjunto $C' = C \cup \{e\}$, y que si

$n(C) = n$, $n(S) = m$, $n(\mathscr{C}_C S) = n - m$ por ser S mayoría de C $m > n - m$

pero entonces

$$m + 1 > (n + 1) - (m + 1) = n - m .$$

Por otra parte, en relación con los conceptos de *mitad, tercio, . . . , enésima parte*, podemos considerar otra pequeña cuestión:

NÚMERO DE PARTICIONES DE UN CONJUNTO EN MITADES, TERCIOS, ... , ENÉSIMAS PARTES.

Si un conjunto tiene $2m$ elementos hay

$$\frac{\binom{2m}{m}\binom{m}{m}}{2!}$$

particiones en mitades, ya que podemos elegir los m elementos de una mitad entre los $2m$, y los m de la otra entre los m restantes, habiendo de dividir por $2!$ para no contar cada partición dos veces.

Análogamente, un conjunto de $3m$ elementos admite.

$$\frac{\binom{3m}{m}\binom{2m}{m}\binom{m}{m}}{3!}$$

Particiones en tercios.

Y, en general, un conjunto de nm elementos

$$\frac{\prod_{i=1}^{i=n}\binom{mi}{m}}{n!}$$

particiones en enésimas partes.

Ejemplos: Un conjunto de 4 elementos admite 3 particiones en mitades. Así para el conjunto $\{a,b,c,d\}$ son $\{\{a,b\}\ ,\ \{c,d\}\}$; $\{\{a,c\}\ ,\ \{b,d\}\}$; $\{\{a,d\}\ ,\ \{b,c\}\}$.

Un conjunto de 6 elementos admite 15 particiones en tercios.

Y aún como en algunos casos puede intervenir el orden, nos ocuparemos del:

NÚMERO DE PARTICIONES ORDENADAS EN MITADES. TERCIOS, ... , ENÉSIMAS PARTES

En este caso, los números son:

Un conjunto de $2m$ elementos admite

$$\binom{2m}{m}\binom{m}{m}$$

particiones ordenadas en mitades.

Un conjunto de $3m$ elementos:

$$\binom{3m}{m}\binom{2m}{m}\binom{m}{m}$$

particiones ordenadas en tercios, y en general uno de nm elementos:

$$\prod_{i=1}^{i=n} \binom{mi}{m}$$

particiones ordenadas en enésimas partes.

Ejemplo: Un conjunto de 4 elementos admite 6 particiones ordenadas en mitades.

Terminaremos con unos

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. ¿Cuántas mayorías tiene un conjunto de 7 elementos?

Solución:

$$2^6 = 64$$

2. ¿Cuántas minorías tiene un conjunto de 10 elementos?

Solución:

$$\frac{2^{10} - \binom{10}{5}}{2} = 386$$

3. Formar las mayorías del conjunto de las vocales:

Solución:

aei, aeo, aeu, aio, aiu, aou, eio, eiu, eou, iou,
aeio, aeiu, aeou, aiou, eiou,
aeiou

4. ¿Cuántas mitades tiene un conjunto de 6 elementos?

Solución:

$$\binom{6}{3} = 20$$

5. ¿Cuántos tercios tiene un conjunto de 12 elementos?

Solución:

$$\binom{12}{4} = 495$$

6. Formar los tercios del conjunto $\{a,b,c,d,e,f\}$

Solución:

ab, ac, ad, ae, af, bc,bd,be, cd,ce,cf,de,df, ef

7. ¿Cuántos elementos ha de tener, como mínimo, un conjunto para tener más de 100 minorías?

Solución: Por la ley de crecimiento de las minorías, bastará hallar el menor número impar que cumple la inecuación:

$$2^{n-1} > 100$$

que es 9, y éste número o el anterior, 8, es la solución, pero como un conjunto de 8 elementos tiene:

$$\frac{2^8 - \binom{8}{4}}{2} = 93$$

la solución 9.

8. En el tute arrastrado por parejas se juega con una baraja de 40 cartas, y cada jugador recibe *un cuarto* de ellas. ¿Cuántos juegos distintos puede recibir un jugador? ¿Cuántos repartos distintos son posibles?

Solución

a) Los juegos distintos son

$$\binom{40}{10} = 847660528$$

b) Los repartos distintos posibles son

$$\binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}$$

9. ¿De cuántas maneras distintas se pueden repartir 9 juguetes distintos, entre 3 niños, de modo que cada niño reciba un tercio de ellos?

Solución:

$$\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = 1680$$

10. Formar todas las particiones en tercios del conjunto $\{a,b,c,d,e,f\}$.

Solución:

$\{\{a,b\}, \{c,d\}, \{e,f\}\}$ $\{\{a,c\}, \{b,d\}, \{e,f\}\}$ $\{\{a,d\}, \{b,c\}, \{e,f\}\}$

$\{\{a,b\}, \{c,e\}, \{d,f\}\}$ $\{\{a,c\}, \{b,e\}, \{d,f\}\}$ $\{\{a.d\}, \{b,e\}, \{c,f\}\}$
$\{\{a,b\}, \{c,f\}, \{d,e\}\}$ $\{\{a,c\}, \{b,f\}, \{d,e\}\}$ $\{\{a,d\}, \{b,f\}, \{c,e\}\}$

$\{\{a,e\} . \{b,c\}, \{d,f\}\}$ $\{\{a,f\}, \{b,c\}, \{d,e\}\}$

$\{\{a,e\}, \{b,d\}, \}c,f\}\}$ $\{\{a,f\}, \{b,d\}, \{c,e\}\}$
$\{\{a,e\}, \{b,f\}, \}c,d\}\}$ $\{\{a,f\}, \{b,e\}, \{c.d\}\}$

11. ¿Cuántas particiones en tercios admite un conjunto de seis elementos?

Solución:

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = 15$$