REPRESENTACION GRAFICA DE LA TRIPARTICION EUDOXO-EUCLIDEA

por

N. Cuesta

1. En *Gaceta Matemática* 22 (1970) expusimos la teoría de los números reales contenida en las Definiciones 5 y 7, verdaderamente admirables, del Libro V de los *Elementos de Euclides*, escritos hacia el año 325 a. de J. C. Conviene completar, lo que allí dijimos, con unas figuras que hacen muy intuitivas las mencionadas Definiciones.

2. N designa el conjunto de los números naturales sin contener el cero. Dadas las magnitudes α y β, que representaremos mediante dos segmentos rectilíneos, sobre la semi-renta OX, de la figura 1, representamos el conjunto $N\alpha$. Análogamente, sobre OY, el conjunto $N\beta$. La malla de puntos interiores al ángulo (XOY) representará el producto cartesiano $(N\alpha \times N\beta)$. Sus elementos serán los puntos $(a\alpha, b\beta)$. Las letras a y b recorren libremente N.

Manifiestamente $(a\alpha, b\beta)$ y (a, b), se determinan biunívocamente. Se pasa así biunívocamente de $(N\alpha x\ N\beta)$, representado en la figura 1, a $(N \times N)$, representado en la figura 3.

3. Sea OW la bisectriz del ángulo (XOY). Evidentemente los puntos $(a\alpha, b\beta)$, de $(N\alpha \times N\beta)$, que verifiquen

$a\alpha > b\beta$ son precisamente los pertenecientes al ángulo (XOW)
$a\alpha = b\beta$ son precisamente los pertenecientes a OW
$a\alpha < b\beta$ son precisamente los pertenecientes al ángulo (WOY)

4. El paso de OW a OW′ se realiza mediante la figura 2. Como

$$(\alpha, \alpha) = \left(\alpha, \beta \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

vemos se pasa del punto (α, β) al punto (α, α), que es de OW, multiplicando por

$$\frac{\alpha}{\beta}$$

la segunda coordenada del primero.

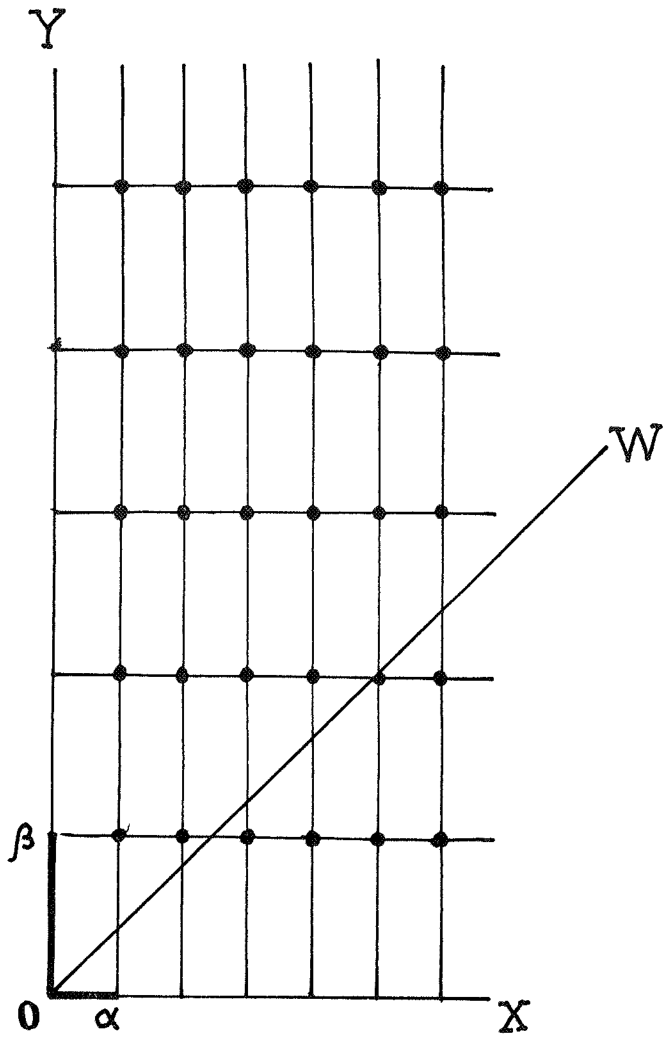

Fig. 1.ª ($N\alpha \times N\beta$)

Aplicando esta transformación al punto (β. β), que es de OW, se tendrá

$$\left(\beta,\ \beta\,\frac{\alpha}{\beta}\right) = (\beta,\ \alpha)$$

que será de OW'.

Por tanto, OW' es la semi-recta que une 0 con (β, α).

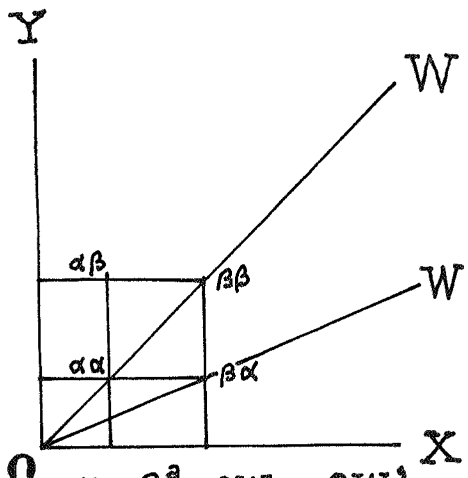

Fig. 2.ª $OW \rightarrow OW'$

5. En consecuencia, a los puntos de la malla ($N\alpha \times N\beta$) (Fig. 1).

pertenecientes al áng. (XOW)
pertenecientes a OW
pertenecientes al áng. (WOY)

corresponderán, respectivamente, los puntos de la malla ($N \times N$) (Fig. 3):

pertenecientes al áng. (X'OW')
pertenecientes a OW'
pertenecientes al áng. (W'OY')

Y la tripartición Eudoxo-Euclídea

$$I < M < F \text{ del conjunto } (N \times N)$$

de que hablábamos en nuestro mencionado artículo, coincide con ésta:

$$\text{áng. } (X'OW') < OW' < \text{áng. } (W'OY')$$

donde el signo $<$ significa «precede a», y entendiendo que los ángulos y OW' son subconjuntos de puntos de la malla ($N \times N$).

6. Si los puntos de la malla ($N \times N$) se proyectaran desde 0, las clases formadas por los puntos contenidos en los rayos proyectantes representarían los números racionales. A la tripartición Eudoxo-Euclídea de las fracciones, correspondería la tripartición de Dedekind (1831-1916) de los números racionales

$$(X'OW')_1 < OW'_1 < (W'OY')_1$$

Estos ángulos hay que considerarlos formados por semi-rayos.

Es muy intuitivo que, tomados α y β al azar, la probabilidad de que haya puntos de la malla $(N\alpha \times N\beta)$ sobre OW es infinitésima (actual).

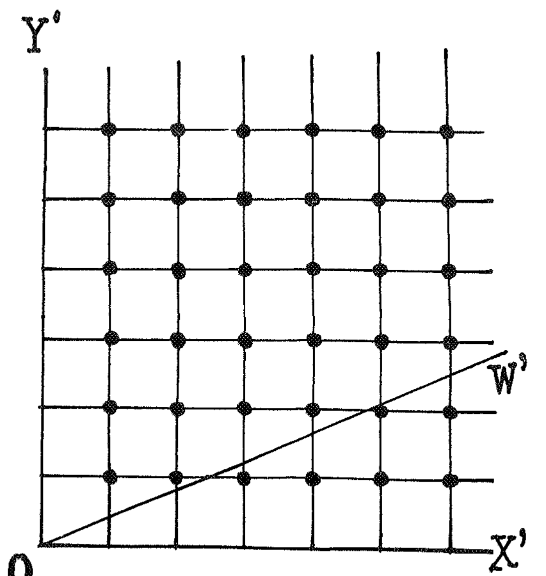

Fig. 3.ª $(N \times N)$

Por tanto, también es infinitésima (actual) la probabilidad de que los haya de $(N \times N)$ sobre OW'. Y así, generalmente, es vacía la clase intermedia en la tripartición de Dedekind: es que la pendiente de OW' es generalmente irracional.

7. El problema de Thales (639-548), que resolvió Eudoxo (408-355) y que codificó Euclides (¿320-275?) alejandrino, fue decidir, para dos pares arbitrarios (α, β) (α^*, β^*) de magnitudes, cuando habría que escribir:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^*}{\beta^*} \text{ (Def. 5. Libro V de Euclides)}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha^*}{\beta^*} \text{ (Def. 7. Libro V de Euclides)}$$

La Definición 5.ª equivale a decir que esas razones son iguales, cuando coincidan las semi-rectas OW′ y OW*′.

La Definición 7.ª equivale a decir que la primera razón es menor que la segunda, precisamente cuando

$$\text{áng.}\,(W'\,O\,W') \subset \text{áng.}\,(W'\,O\,W^{*\prime})\ (1)$$

8. No conocemos el artículo siguiente, cuya reseña hemos visto en *Math. Rev.* 38 (1966), pág. 2:

Beckmann Friedhelm: Neue Gesichtpunkte zum 5 Buch Euclids Arch. History Exact Sci. 4 (1967/68), 1-144).

(1) El signo $\subset$ (como en Hausdorff (1868-1942) Grundzuge der Mengenlehre (1914)) lo empleamos para significar «estrictamente incluido en». Para expresar «incluido en», empleamos el signo $\subseteq$. La distinción entre ambas relaciones es necesaria muchísimas veces. Y teniendo prioridad ambos signos para esos significados, consideramos desacertado haber cambiado la significación del signo $\subset$ para que traduzca «incluido en», como hacen hoy muchos, y todo por el empeño de que sólo hay ordenaciones reflexivas, cuando las más inmediatas son las irreflexivas.