NOTA SOBRE LAS ECUACIONES DE VOLTERRA DE PRIMERA ESPECIE REDUCIBLES A ECUACIONES DE CONVOLUCION

por

MANUEL ABEJÓN ADÁMEZ

OBJETO

Como es sabido, las ecuaciones integrales de Volterra, de primera y segunda especies (con $f(x)$ función incógnita),

$$\int_a^x k(x, t)\, f(t)\, dt = g(x)$$

$$f(x) + \int_a^x k(x, t)\, f(t)\, dt = g(x)$$

se reducen cuando $a = 0$, lo que siempre puede conseguirse con un cambio de origen, y el núcleo $k(x, t)$ depende exclusivamente de la diferencia $x - t$ a ecuaciones de convolución, de tratamiento más simple que el caso general (por ejemplo, mediante la transformación de Laplace).

En la presente nota vamos a examinar un tipo de ecuaciones de primera especie, en las que no es $k(x, t) = k_1(x - t)$, pero que, no obstante, mediante un cambio de variable apropiado, pueden transformarse en ecuaciones de convolución. Se encuentran ejemplos particulares de tales ecuaciones en distintos textos, pero no hemos visto en ninguna parte desarrollada una formulación general.

Señalemos que, en lo que sigue, se supondrá que las ecuaciones de que se trate cumplen las condiciones de existencia y unicidad de la solución; como se recordará, las ecuaciones de convolución de primera especie se comportan de forma esencialmente distinta que las de segunda en este aspecto y frecuentemente carecen de solución (ver ref. [1]).

ECUACIONES REDUCIBLES

Sea la ecuación de Volterra de primera especie

$$\int_a^x k(x, t)\, f(t)\, dt = g(x) \qquad [1]$$

perteneciendo x a un intervalor $I = [\, a, b\,]$ con $a < b \leqslant \infty$.

Si el núcleo $k(x, t)$ puede escribirse como función exclusiva del argumento $\varphi(x) - \varphi(t)$:

$$k(x, r) = k_1(\varphi(x) - \varphi(t)) \qquad \forall\, x \in I, \qquad a < t \leqslant x$$

siendo φ una aplicación de I sobre R+, tal que $\varphi \in C^1(I)$ y que se cumple

$$\varphi(a+) = \lim_{x \to a + o} \varphi(x) = 0 \qquad \varphi'(x) > 0 \qquad \forall\, x \in I$$

se puede entonces hacer el cambio de variable:

$$\xi = \varphi(x) \qquad \tau = \varphi(t)$$
$$x = \psi(\xi) \qquad t = \psi(\tau)$$

siendo $\psi = \varphi^{-1}$ la aplicación de R+ sobre I inversa de la φ (que existe y es derivable por cumplirse las hipótesis del teorema de existencia de funciones implícitas), y la ecuación [1] se transforma en:

$$\int_o^\xi k_1(\xi - \tau)\, f(\psi(\tau))\, \psi'(\tau)\, d\,\tau = g(\psi(\xi)) \qquad [2]$$

que haciendo:

$$f(\psi(\tau))\, \psi'(\tau) = f_1(\tau) \qquad [3]$$

$$g(\psi(\xi)) = g_1(\xi) \qquad [4]$$

se reduce definitivamente a la ecuación de convolución

$$\int_o^\xi k_1(\xi - \tau)\, f_1(\tau)\, d\,\tau = g_1(\xi) \qquad [5]$$

Para calcular f, supuesto obtenido f_1 de [5], bastará deshacer el cambio, teniendo en cuenta que $\varphi'(x)\ \psi'(\xi) = 1$; o sea:

$$f(x) = f_1(\varphi(x))\, \varphi'(x) \qquad [6]$$

Es inmediato observar que alguna de las condiciones anteriormente impuestas a φ no suponen, en realidad, ninguna restricción, ya que:

$\varphi(a+)$ puede no ser cero; im φ no ser R^+; y no tener φ derivada positiva y, sin embargo, obtenerse el mismo resultado sólo con que se cumpla:

$$\varphi \in C^1(I), \qquad \varphi'(x) \neq 0 \qquad \forall\, x \in I,$$

$$\text{e im } \varphi \text{ sea } [\ \varphi(\ +),\ +\infty\ ] \quad \text{ó} \quad [\ \varphi(a+),\ -\infty\ ]$$

En efecto, basta entonces hacer

$$|\ \varphi(x) - \varphi(a+)\ | = \varphi_1(x)$$

$$k(x, t) = k_1(\varphi(x) - \varphi(t)) = k_2(\varphi_1(x) - \varphi_1(t))$$

donde k_2 tiene idéntica forma que k_1, salvo la posible incorporación de un signo.

Una aplicación

Propongámonos resolver la ecuación integral:

$$\frac{1}{x^\beta}\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x \text{ sen } \theta)}{\cos^\beta \theta}\, d\theta = g(x) \qquad -\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2} \qquad g \in C^1([o, \infty])$$

Es de señalar que esta ecuación se presenta como una generalización de la clásica de Schlomilch

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_o^{\frac{\pi}{2}} f(x \text{ sen } \theta)\, d\theta$$

a la que se reduce si $\beta = o$ y se toma

$$g(x) = \frac{\pi}{2} F(x).$$

En el «curso» de Whittaker y Watson (ref. [2]) se resuelve esta última, en la hipótesis de que $F \in C^1([-\pi, \pi])$ y por un método directo, obteniéndose que la solución f también pertenece a C^1 $([\pi, -\pi])$ y puede expresarse por la fórmula:

$$f(x) = F(o) + x\int_o^{\frac{\pi}{2}} F'(x \text{ sen } \theta)\, d\theta$$

En lo que sigue vamos a demostrar que la ecuación propuesta es equivalente a una de Volterra singular de primera especie, a la que con la técnica expuesta previamente, se le puede reducir a una de convolución clásica. En efecto, el cambio x sen $\theta = t$ convierta la ecuación en la siguiente:

$$\int_0^x \frac{f(t)\, dt}{(x^2 - t^2)^{\frac{\beta+1}{2}}} = g(x)$$

A esta última ecuación le es aplicable la teoría anterior, ya que, para ella, $\varphi(x) = x^2 = \xi$ y $\psi(\xi) = \sqrt{\xi} = x$ y puede reducirse a la clásica de Abel generalizada:

$$\int_0^\xi \frac{f_1(\tau)\, d\tau}{(\xi - \tau)^\alpha} = g_1(\xi) \qquad 0 < \alpha < 1$$

con f_1 y g_1 definidas en la forma explicada anteriormente y $2\alpha = \beta + 1$. Como es sabido, la ecuación generalizada de Abel puede resolverse fácilmente por diferentes métodos (por ejemplo, utilizando la transformada de Laplace), y su solución es

$$f_1(\xi) = \frac{\text{sen}\ \alpha\pi}{\pi} \left[\frac{g_1(o)}{\xi^{1-\alpha}} + \int_0^\xi \frac{g'_1(s)}{(\xi - s)^{1-\alpha}}\, ds \right]$$

por lo tanto, deshaciendo el cambio, se tendrá:

$$f(x) = \frac{2x}{\pi}\ \text{sen} \left(\frac{\beta + 1}{2}\, \pi \right) \left[\frac{g(o)}{x^{1-\beta}} + \int_0^x \frac{g'(\tau)}{[x^2 - \tau^2]^{\frac{1-\beta}{2}}}\, d\tau \right]$$

y, utilizando una variable de integración análoga a la de la ecuación, también:

$$f(x) = \frac{2x}{\pi}\ \text{sen} \left(\frac{\beta + 1}{2}\, \pi \right) \left[\frac{g(o)}{x^{1-\beta}} + x^\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'\ (x\ \text{sen}\theta)\ \cos^\beta \theta\ d\theta \right]$$

(Como se comprueba inmediatamente, con la particularización apropiada, se vuelve a obtener la solución de la ecuación de Schlömilch.)

Observación

El método no es aplicable a las ecuaciones de segunda especie, porque al hacer el cambio de variable, en la hipótesis de que el núcleo sea del tipo indicado, resulta que quedaría:

$$f(\psi(\xi)) + \int_0^\xi k_1(\xi - \tau)\, f_1(\tau)\, d\tau = g_1(\xi)$$

ecuación que no tiene la forma de las de convolución de segunda especie,

REFERENCIAS

1. Schwartz, L.: *Métodos matemáticos para las ciencias físicas* (traducción del francés). Selecciones Científicas, Madrid, 1969.

2. Whittaker, E. T. y Watson, G. N.: *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1965 (reimpresión).