HOMOTETIAS ENTRE DUAS CIRCUNFERENCIAS

por

JAYME MACHADO CARDOSO

O problema que consiste em saber as homologias não homotéticas que levam uma dada circunferència em outra circunferència, também dada, resolvido em [1], está intımamente relacionado com a questão de saber quais são as homotetias que levam uma das curvas na outra.

Se fôr possível traçar pelo menos duas tangentes comuns às duas circunferèncias, o ponto comum a estas tangentes será o centro da homotetia. Mas, dadas duas circunferèncias não concèntricas existem sempre duas homotetias (ver, p. ex. [2], p. 162) que transformam uma curva na outra. Qualquer que seja a posição de uma das curvas em relação à outra, a construção des centros das homotetias pode ser feita com auxílio da Geometria Descriptiva.

Sejam, pois, duas circunferèncias Υ' e Λ'. Estas circunferèncias podem ser consideradas como projeções horizontais de duas circunfe-

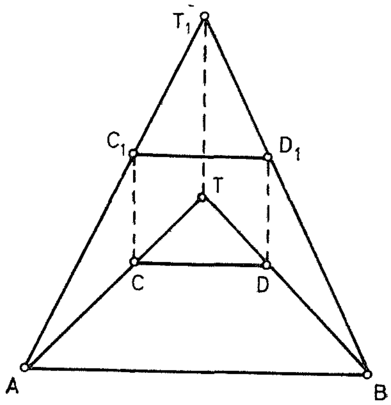

Fig 1

rências Υ e Λ, situadas em planos horizontais distintos. Suponhamos a linha de terra paralela à linha dos centros das circunferências dadas, e indiquemos com AB e CD es projeções verticais das circunferências Υ e Λ.

As duas circunferências Υ e Λ são supostas secções de um mesmo cone. A projeção horizontal do vértice do cone é o centro da homologia na qual se correspondem Υ' e Λ' (ver, p. ex. [3], p. 430), e o eixo de tal homologia é impróprio por serem paralelos os planos de Λ e Υ.

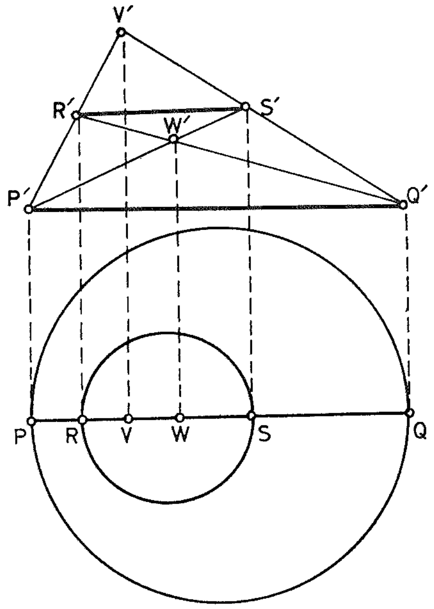

Fig. 2

Resta mostrar que a projeção do vértice do cone independe da diferença de cotas dos planos de Υ e Λ.

Para tal, seja C_1D_1 outra projeção vertical de Λ. Seja T o ponto comum às retas AC e BD, T_1 o ponto comum às retas AC_1 e BD_1. É preciso mostrar que a reta TT_1 é paralela à CC_1. Ora, os triângulos CTD e $C_1T_1D_1$ têm seus lados correspondentes com pontos comuns sôbre a reta AB (figura 1); então, pelo teorema de Desargues, as retas que passam pelos vértices correspondentes têm um ponto em comum. Como CC_1 e DD_1 são paralelas, resulta que a reta TT_1 é paralela à reta CC_1.

Em conclusão, dadas duas circunferências de centros X e Y, a construção dos centros das homotetias que levam uma das curvas na outra pode ser feita da seguinte maneira: Dos pontos P,Q e R,S em que a linha dos centros XY encontra as circunferências (Fig. 2), conduzem-se retas perpendiculares à XY. Duas paralelas à XY cortam as perpendiculares nos pontos P′,Q′ e R′,S′. As retas P'R′ e Q′S′ cortam-se no ponto V′; as retas P′S′ a Q′R′ cortam-se no ponto W′. As perpendiculares à WY

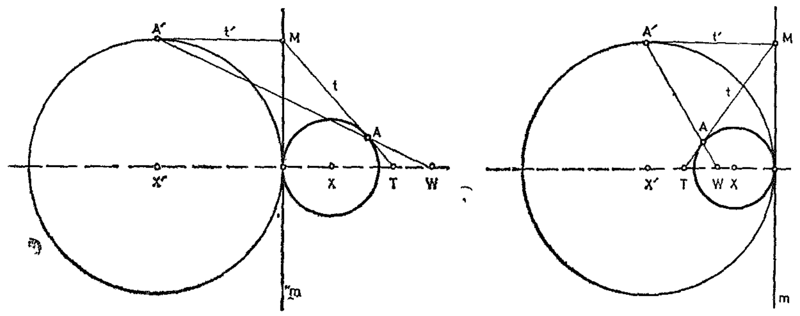

Fig. 3

conduzidas de V′ e W′ cortam XY nos pontos V e W, que são os centros das homotetias procurados.

REFERENCIAS

[1] CARDOSO, JAYME M.: Sôbre o eixo radical de duas circunferências. *Gaceta Matemática.*

[2] VEBLEN & YOUNG: *Projective Geometry.* Vol. 2, Ginn and Co., 1946.

[3] TAIBO FERNANDEZ: *Tratado de Geometria Descriptiva.* El Ateneo. 1947.

(Instituto de Matemática. Universidade Federal do Paraná, Brasil.)