NOTA SOBRE TRANSFORMACIONES EN TORNO AL ORIGEN EN EL PLANO POLAR

por

PEDRO JESUS BURILLO

Consideremos el plano afín E^2 referido a un sistema de representación $L = \{O, r\}$, en donde r es una recta fija de E^2 llamada *eje polar* y O un punto fijo de r llamado *polo*.

Asignemos a cada $P \in E^{*2} = E^2 - \{O\}$ un elemento (ρ, ω) del conjunto $\overline{\mathbf{R}}^*_+ \times (\mathbf{R}/2\pi Z)$, en donde $\overline{\mathbf{R}}^*_+$ representa el conjunto de los números reales positivos ampliados con $+\infty$, ρ expresa la distancia euclídea de O a P y ω la clase de $\mathbf{R}/2\pi Z$ de representante canónico el ángulo $\widehat{(r, OP)}$ medido en sentido positivo, $0 \leqslant \widehat{(r, OP)} < 2\pi$. Es evidente que cada punto $P \in E^{*2}$ determina de una manera única un par (ρ, ω) y recíprocamente; queda, pues, establecido un sistema de coordenadas en E^{*2}. Los elementos ρ, ω, correspondientes a cada punto $P \in E^{*2}$, reciben el nombre de coordenadas polares de P en el sistema L: ρ es la coordenada distancia, ω es la coordenada angular.

Vamos a estudiar algunas transformaciones particulares de E^{*2}. Notemos que como $O \notin E^{*2}$, E^{*2} no puede ser dotado de estructura de espacio vectorial, lo que limitará el estudio de las transformaciones generales en E^{*2}.

La definición clásica de transformación afín definida en un plano cartesiano nos sugirió el estudio particulár de un tipo de transformaciones en el plano polar: las dadas por

$$\rho' = a_1 \rho + a_2$$

$$\omega' = b_1 \omega + b_2$$

en donde

$$a_1, a_2 \in \mathbf{R} \quad , \quad b_1 \in Z \quad \text{y} \quad b_2 \in \mathbf{R}/2\pi Z$$

estando, como es lógico, los valores a_1, a_2, b_1, b_2 sujetos a ciertas restricciones derivadas del hecho de que las coordenadas distancia ρ son siempre positivas y que las coordenadas angulares ω son clase de números reales.

Sistematizaremos este tipo de transformaciones.

Definición 1. Llamaremos transformación afín en E^{*2} a toda correspondencia puntual A: $E^{*2} \longrightarrow E^{*2}$ que a un punto $P(\rho, \omega)$ asocia $P'(\rho', w')$ mediante la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \rho' \\ \omega' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ b_2 & 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \\ \omega \end{pmatrix}$$

con

$$a_1, a_2 \in \mathbf{R} \wedge b_2 \in \mathbf{R}/2\pi Z \wedge b_1 \in Z \wedge a_1 \neq 0 \wedge b_1 \neq 0.$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ b_2 & 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

se llama matriz de la transformación.

Para probar que esta definición es consistente será preciso demostrar que si elegimos otras coordenadas para P se obtiene el mismo punto transformado P'. Daremos para ello la proposición:

Proposición 1. Una transformación afín A, según la definición anterior, tiene sentido.

Demostración: En efecto, consideremos otra representación (ρ, ω_1) de P. Entonces

$$\omega_1 \equiv \omega\ (2\pi).$$

Como

$$\omega' = b_1\,\omega + b_2$$

$$\omega'_1 = b_1\,\omega_1 + b_2$$

podremos escribir

$$\omega'_1 - \omega' = b_1(\omega_1 - \omega) \equiv 0\ (2\pi)$$

ya que $b_1 \in Z$. Se tiene, pues, que (ρ', ω') y (ρ', ω'_1) corresponden al mismo punto P' c.q.d.

El nombre de transformación afín es debido a que por analogía con lo que ocurre en el caso del plano cartesiano, también en este tipo de transformaciones se conservan los puntos impropios, como es fácil verificar.

Como los valores de la coordenada distancia ρ son siempre positivos, los dominios D_A y recorridos V_A de transformaciones A serán distintos, según los signos de a_1 y a_2. Estudiaremos estos casos:

TIPO I.

$$a_1 > 0 \quad \text{y} \quad a_2 \geqslant 0.$$

Entonces

$$\rho' = a_1\,\rho + a_2 > 0 \quad \forall\, \rho \in \overline{\mathbf{R}}^*_+$$

luego en este caso

$$D_A = E^{*2} \quad y \quad V_A = E^{*2}.$$

Tipo II.

$$a_1 > 0 \quad y \quad a_2 < 0.$$

Se tendrá

$$\rho' = a_1 \rho + a_2 > 0 \qquad \forall \rho > -\frac{a_2}{a_1} > 0$$

luego podremos escribir

$$D_A = \left\{ P(\rho, \omega) \mid \rho > -\frac{a_2}{a_1} \right\} \quad y \quad V_A = E^{*2}.$$

Tipo III.

$$a_1 < 0 \quad y \quad a_2 > 0.$$

Como

$$\rho' = a_1 \rho + a_2 > 0$$

para todo ρ tal que

$$0 < \rho < -\frac{a_2}{a_1}$$

resulta

$$D_A = \left\{ P(\rho, \omega) \mid 0 < \rho < -\frac{a_2}{a_1} \right\}.$$

Al ser además

$$\rho' = a_1 \rho + a_2 < a_2$$

se tendra

$$V_A = \{P'(\rho', \omega') \mid \rho' < a_2\}.$$

Tipo IV.

$$a_1 < 0 \quad y \quad a_2 \leqslant 0.$$

Podemos escribir entonces

$$\rho' = a_1 \rho + a_2 < 0 \qquad \forall \rho \in \overline{\mathbf{R}}^*_+$$

luego $D_A = \emptyset$. A no está definido. En lo sucesivo este caso no será considerado.

En principio existen, pues, tres categorías bien diferenciadas de transformaciones afines definidas A. Nos proponemos, con el estudio de problemas como el de existencia de transformación inversa, restringir el estudio de estas transformaciones hasta llegar al tipo de transformaciones más perfecto, en el sentido de que para esas transformaciones, el cálculo y teoría de matrices sea lo más semejante al ya conocido en el plano cartesiano.

Podemos definir para ello un producto de transformaciones afines.

Definición 2. Dadas dos transformaciones afines A y B de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ b_2 & 0 & b_1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a'_2 & a'_1 & 0 \\ b'_2 & 0 & b'_1 \end{pmatrix}$$

llamaremos transformación producto, cuando exista, a la transformación B.A de matriz la matriz producto

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a'_2+a_2a'_1 & a_1a'_1 & 0 \\ b'_2+b_2b'_1 & 0 & b_1b'_1 \end{pmatrix}$$

Observación: Naturalmente, para cada caso será preciso estudiar el dominio de definición de la transformación producto en función de los dominios de las transformaciones componentes, pues, por ejemplo, si A y B son del tipo IV, al ser $a_1 < 0$ y $a'_1 < 0$, como $a_1a'_1 > 0$ resulta que B.A está definida como transformación, pero no como transformación producto de las A y B, puesto que éstas no están definidas.

En el orden de perfección antes apuntado, nos limitaremos únicamente al caso de producto de transformaciones del mismo tipo:

1. A y B de tipo I. Será entonces

$$\begin{matrix} a_1 > 0 & a_2 \geqslant 0 \\ a'_1 > 0 & a'_2 \geqslant 0 \end{matrix}$$

y se tendrá

$$a_1a'_1 > 0 \quad \text{y} \quad a'_2+a_2a'_1 \geqslant 0$$

luego B.A es también del tipo I, con

$$D_{B.A} = E^{*2} \text{ y } V_{B.A} = E^{*2}.$$

2. A y B de tipo II. Al ser

$$\begin{matrix} a_1 > 0 & a_2 < 0 \\ a'_1 > 0 & a'_2 < 0 \end{matrix}$$

podremos poner

$$a_1a'_1 > 0 \quad \text{y} \quad a'_2+a_2a'_1 < 0$$

con lo que B.A es también de tipo II. Veamos su dominio de definición: los dominios de A y B son, respectivamente, los conjuntos de puntos de E^{*2} cuya coordenada distancia verifica

$$\rho > -\frac{a_2}{a_1} \quad \text{y} \quad \rho > -\frac{a'_2}{a'_1}.$$

Si P(ρ, ω) es un punto de D_A, su transformado por A, cuya coordenada distancia será $a_1 \rho + a_2$, deberá pertenecer a D_B, es decir:

$$a_1 \rho + a_2 > -\frac{a'_2}{a'_1}$$

de donde

$$\rho > -\frac{a'_2+a_2a'_1}{a_1a'_1}$$

resultando, pues, que el dominio de B.A es el conjunto de puntos de E^{*2}, cuya coordenada distancia es superior a

$$-\frac{a'_2+a_2a'_1}{a_1a'_1}$$

como se podía haber obtenido directamente de la forma de la matriz B.A.

En estos dos casos, pues, la operación producto es interna y, además, el dominio de la transformación producto viene determinado exactamente por la forma de la matriz producto. Este hecho no ocurre cuando A y B son de tipo III, como vamos a ver.

3. A y B de tipo III. Si

$$\begin{array}{ll} a_1 < 0 & a_2 > 0 \\ a'_1 < 0 & a'_2 > 0 \end{array}$$

se tendrá $a_1a'_1 > 0$, pudiendo ser $a'_2+a_2a'_1$ positivo, nulo o negativo, según que

$$a_2 < -\frac{a'_2}{a'_1} \qquad a_2 = -\frac{a'_2}{a'_1} \qquad a_2 > -\frac{a'_2}{a'_1}.$$

Por consiguiente, la matriz producto B.A. define una transformación de tipo I o II, pero su dominio de definición no es el que le corresponde por la forma de la matriz producto B.A, pues si un punto P(ρ, ω) pertenece a D_A, será

$$\rho < -\frac{a_2}{a_1}.$$

La coordenada distancia de su transformado $a_1 \rho + a_2$, por pertenecer éste a D_B verificará

$$a_1 \rho + a_2 < -\frac{a'_2}{a'_1}$$

de donde

$$\rho > -\frac{a'_2+a_2a'_1}{a_1a'_1}$$

con lo que $D_{B \cdot A}$ será el conjunto de puntos de E^{*2} cuya coordenada distancia verifique

$$-\frac{a'_2+a_2a'_1}{a_1a'_1} < \rho < -\frac{a'_2}{a'_1}.$$

En este caso, pues, la matriz de la transformación B.A no define exactamente el dominio de la transformación producto. Desecharemos, pues, este tipo de transformaciones por su comportamiento patológico.

Abordaremos ahora el problema de investigar en qué condiciones, para transformaciones de los tipos I y II, existen inversas y son del mismo tipo: evidentemente, la transformación inversa de una dada A de matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ b_2 & 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

será la correspondiente a la matriz inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_2}{a_1} & \dfrac{1}{a_1} & 0 \\ -\dfrac{b_2}{b_1} & 0 & \dfrac{1}{b_1} \end{pmatrix}$$

Notemos que A^{-1} existe como transformación afín si y sólo si

$$\frac{1}{b_1}$$

es entero, lo que lleva consigo que $b_1 = \pm 1$. Restringiendo aún más, consideraremos de ahora en adelante únicamente transformaciones a las que correspondan matrices que tengan como último elemento de la diagonal principal el valor $+1$ ó -1.

Podemos enunciar ahora:

Proposición 2. La condición necesaria y suficiente para que una transformación A de tipo I admita inversa y sea del mismo tipo I, es que $a_2 = 0$.

Dem.: A^{-1} es de tipo I si y sólo si

$$-\frac{a_2}{a_1} \geqslant 0 \Leftrightarrow a_2 = 0.$$

Es importante hacer notar que si A es una transformación de tipo II, al ser

$$a_2 < 0 \Rightarrow -\frac{a_2}{a_1} > 0,$$

la transformación inversa A^{-1} es, pues, de tipo I. En el orden de restricciones antes anunciadas, nos limitaremos en lo que sigue al estudio de transformaciones de tipo I y dentro de ellas, las que poseen $a_2 = 0$, por reunir éstas las máximas condiciones favorables para el estudio de sus inversas. Considerando, pues, únicamente transformaciones A de matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ b_2 & 0 & b_1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } b_1 = \pm 1$$

observamos que si $b_1 = -1$, el producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_1 & 0 \\ b'_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_1 a_1 & 0 \\ b'_2 - b_2 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

no es interno en este tipo de transformaciones, por lo que no serán estudiadas. Definitivamente, pues, designaremos por Y el conjunto de transformaciones afines A de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a \in \mathbf{R}, \; a > 0 \\ b \in \mathbf{R}/2\pi \mathrm{Z} \end{array}$$

Proposición 3. Y es un grupo abeliano respecto a la operación producto de transformaciones.

Dem.: Es trivial según lo que antecede.

Proposición 4. Si $A \in Y$, de matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$P(\rho, \omega)$ $P_1(\rho_1, \omega_1)$ dos puntos de E^{*2} y $P'(\rho', \omega')$ y $P'_1(\rho'_1, \omega'_1)$ los transformados por A se tiene

$$\overline{P'P'_1} = a\, \overline{PP_1}$$

Dem.: En efecto, será

$$d = \overline{P\,P_1} = \sqrt{\rho^2 + \rho^2_1 - 2\,\rho\,\rho_1 \cos(\omega_1 - \omega)}$$

como

$$\begin{array}{ll} \rho' = a\,\rho & \rho'_1 = a\,\rho_1 \\ \omega' = \omega + b & \omega'_1 = \omega_1 + b \end{array}$$

se tendrá

$$d' = \overline{P'P'_1} = \sqrt{a^2\,\rho^2 + a^2\,\rho^2_1 - 2a^2\,\rho\,\rho_1 \cos(\omega_1 - \omega)} = a\,d$$

c.q.d.

Por este motivo, las transformaciones $A \in Y$ son llamadas *semejanzas* de centro 0. El valor a recibe el nombre de *razón* de la semejanza.

Notemos que la inversa de una semejanza

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

otra semejanza de razón la recíproca $1/a$ de a.

Observemos que la matriz A de una semejanza puede escribirse bajo la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} = A' . A''$$

siendo evidentemente dicho producto conmutativo. Las expresiones analíticas de las transformaciones A′ y A″ son

$$A' \left\{ \begin{array}{l} \rho' = a\,\rho \\ \omega' = \omega \end{array} \right. \qquad A'' \left\{ \begin{array}{l} \rho' = \rho \\ \omega' = b + \omega \end{array} \right.$$

que corresponden, respectivamente a una homotecia de centro O y razón a, la razón de semejanza, y un giro de centro O y amplitud b, de forma que podemos enunciar

Proposición 5. Toda semejanza de centro O puede descomponerse como producto de un giro de centro O y una homotecia de centro O y razón la de semejanza, siendo dicho producto conmutativo.

Finalmente, daremos las siguientes proposiciones, verificadas análogamente a como ocurre en el plano cartesiano.

Proposición 6. El conjunto G de giros en torno al origen es subgrupo abeliano de Y.

Ee.: El producto de dos giros

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b' & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b'+b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es otro giro de centro O y amplitud la suma de amplitudes. También la transformación inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de un giro de amplitud b es otro giro de amplitud la opuesta $-b$. La conmutatividad es trivial.

Proposición 7. El conjunto H de homotecias de centro el origen es subgrupo de Y, subgrupo abeliano.

Dem.: El producto de dos homotecias

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & aa' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es otra homotecia de centro el origen y razón el producto de las razones. También la inversa de una homotecia de razón a es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

otra homotecia de centro O y razón la recíproca $1/a$ de a. Naturalmente la conmutatividad es cierta.

Departamento de Geometría y Topología.
Facultad de Ciencias. Zaragoza.