EL METODO AXIOMATICO Y ALGEBRA DE RELACIONES Y CONDICIONES LOGICAS

por

JUAN ESTEBAN PALOMAR TARANCÓN

XII

HOMOMORFISMOS

Si e_1, e_2, e_3 ... $e\mu$ son los elementos de un conjunto absolutamente definido E y los conjuntos de condiciones lógicas Ae_1, Ae_2 ... $Ae\mu$ son las definiciones correspondientes a cada uno de estos elementos siempre que dichas definiciones tengan un subconjunto de condiciones lógicas $M\tau$, común a todas, podremos determinar un homomorfismo entre el conjunto E y otro conjunto $\overline{E}$ que, de forma análoga a la nomenclatura propia de la teoría de grupos, lo podremos llamar «divisor normal de E».

Veamos:

A partir de las Ae_1, Ae_2 ... $Ae\mu$ formemos otros conjuntos de condiciones lógicas $\overline{A}e_1$, $\overline{A}e_2$ ... $\overline{A}e\mu$ constituidos por las mismas que Ae_1, Ae_2 ... menos el conjunto común a todas $M\tau$, o sea:

$\overline{A}e_1 = (Ae_1 \cap M'\tau)$ y por consiguiente será $Ae_1 = (\overline{A}e_1 \cup M\tau)$

$\overline{A}e_2 = (Ae_2 \cap M'\tau)$ y por consiguiente será $Ae_2 = (\overline{A}e_2 \cup M\tau)$

....

....

$\overline{A}e\mu = (Ae\mu \cap M'\tau)$ y por consiguiente será $Ae\mu = (\overline{A}e\mu \cup M\tau)$

En general, cada $\overline{A}e\mu$ definirá un subconjunto $\overline{e}\mu$ de E, teniendo en cuenta el teorema 2; por ende, a cada elemento $e\mu$ le corresponderá un subconjunto $\overline{e}\mu$ constituido por n elementos, de aquí que la correspondencia no sea biunívoca y solo se pueda definir a partir de ella un homomorfismo.

Se pueden dar tres casos:

1. Si A es una fórmula o condición lógica de Prop(E), implicada por las intersecciones $(Ae_1 \cap M'\tau)$ o $(Ae_2 \cap \overline{M'\tau})$..., será satisfecha indistintamente por los $e_1, e_2 \ldots e\mu$ y los $\overline{e_1}, \overline{e_2} \ldots \overline{e\mu}$.

2. Si A es una condición lógica satisfecha por los $e_1, e_2 \ldots e\mu$ siempre que no contenga a las $M\tau$, la intersección $(A \cap \overline{A}\ e\mu)$ será

$$(A \cap \overline{A}e\mu) = (A \cap Ae\mu)$$

luego, aplicando el teorema 1, tendremos

$$\overline{e\mu} \vdash A$$

3. Si A es una condición lógica compuesta, que tenga como condición necesaria a las $M\tau$ o que las implique, no será satisfecha en general por los $\overline{e\mu}$.

Como de los tres casos citados, las condiciones lógicas incluidas en los dos primeros, son satisfechas por los $e\mu$, y, aunque las citadas en el tercer caso no lo sean, sí serán satisfechas las intersecciones

$$(A \cap M'\tau)$$

de acuerdo con el teorema 1, podemos afirmar que el conjunto $\overline{e_1}, \overline{e_2} \ldots \overline{e\mu}$ satisface las mismas propiedades generales que el conjunto E; la correspondencia que hemos descrito determinará un homomorfismo.

Las relaciones y consecuencias lógicas que se desprenden del homomorfismo determinado entre un grupo y su grupo cociente no son más que un caso particular de los homomorfismos de conjuntos que hemos descrito. Consideremos la importancia que tienen estos resultados en la teoría de Galois y veremos lo importante que es su generalización a conjuntos cualesquiera y su formulación dentro del marco de las matemáticas de conjuntos y lógica matemática.

Hay muchos procedimientos de cálculo y resolución de ecuaciones que, fundamentalmente, consisten en la aplicación de los homomorfismos descritos, aunque se hayan obtenido intuitivamente, sin llegar a tener pleno conocimiento de la estructura puramente lógica de los mismos. Como ejemplos podemos citar todos los métodos de resolución de problemas o ecuaciones en los que se halla primeramente la solución de una ecuación parecida a la que se trata de resolver, para que, basándonos en la solución obtenida, podamos hallar posteriormente la de la primera, precisamente porque se supone que por ser parecidas ambas ecuaciones también lo serán sus soluciones. Un ejemplo bien significativo lo tenemos en el método de resolución de ecuaciones diferenciales por variación de constantes. La estructura lógica de estos

---

NOTA: El homomorfismo descrito debe entenderse en el sentido de conjuntos o realizaciones que satisfacen unas mismas estructuras o condiciones lógicas, tal como se definió el isomorfismo en el capítulo III, y no debe entenderse en el sentido de la Teoría de grupos.

métodos tiene su expresión abstracta en el contenido del presente capítulo.

XIII

DESVIACIONES

Si F^n es un símbolo funcional de n variables y $c_1, c_2, \ldots c_n$ son elementos cualesquiera de un conjunto C, diremos que F^n es *cerrado* en el conjunto C, siempre que su aplicación a los $c_1, c_2 \ldots c_n$ también pertenezca a C, o sea

$$(c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots c_n) \in C$$

$$F^n (c_1, c_2 \ldots c_n) \in C$$

Si $a_1, a_2 \ldots a_n$ y $b_1, b_2 \ldots b_n$ son elementos o subconjuntos de dos conjuntos A y B, respectivamente, que están en relación «R», o sea:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \text{ «R» } b_1 \\ a_2 \text{ «R» } b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n \text{ «R» } b_n \end{array}\right.$$

y F^n es un símbolo funcional cerrado en las cotas de «R», al aplicar dicho símbolo a los $a_1, a_2 \ldots a_n$ se pueden dar dos casos:

1. Tomando como primer miembro de «R» la expresión $F^n(a_1, a_2 \ldots)$ le corresponde, en el segundo miembro, precisamente la expresión $F^n(b_1, b_2 \ldots)$, o sea:

$$F^n(a_1, a_2 \ldots a_n) \text{ «R» } F^n(b_1, b_2 \ldots b_n)$$

2. Tomando $F^n(a_1, a_2 \ldots a_n)$ como primer miembro de «R» le corresponde en el segundo miembro $G^n(b_1, b_2 \ldots b_n)$; donde G^n es otro símbolo funcional distinto de F^n y del mismo número de variables proposicionales. En el primer caso diremos que «R» es homogénea respecto a F^n y en el segundo, heterogénea.

Desviaciones.—Supongamos que al aplicar un símbolo funcional cerrado al primer miembro de un sistema de relaciones

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \text{ «R» } b_1 \\ a_2 \text{ «R» } b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n \text{ «R» } b_n \end{array}\right.$$

le corresponda en el segundo miembro, la función booleana construida por reunión de los $b_1, b_2 \ldots b_n$, o sea:

$$F^n(a_1, a_2 \ldots a_n) \text{ «R» } (b_1 \cup b_2 \cup b_3 \ldots b_n)$$

En este caso diremos que F^n es un símbolo funcional «característico» de la relación «R». Se puede concebir otro caso análogo:

Supongamos que tomando como primer miembro de «R» a la expresión $F^n(a_1, a_2 \ldots)$, dicha relación es tal, que hace corresponder en su segundo miembro la expresión $(K_1 b_1 \cup K_2 b_2 \cup \ldots \cup K_n b_n)$ de n transformaciones de los $b_1, b_2 \ldots b_n$, que expresamos por medio de los operadores que las efectúan $K_1, K_2 \ldots K_n$. A dichas transformaciones $K_1, K_2 \ldots K_n$ las llamaremos «desviaciones» de la relación «R» respecto al símbolo funcional característico F^n.

Ejemplo: Supongamos que «R» es la relación que expresa el siguiente juicio o proposición:

...... «son las soluciones de la ecuación» ......

Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación de segundo grado $x^2 + bx + c = 0$ tendremos:

$$(x_1 \cup x_2) \text{ «R» } (x^2 + bx + c)$$

de forma análoga, si $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ y $\overline{x}_3$ son las raíces de la ecuación de tercer grado $x^3 + dx^2 + ex + f$, tendremos:

$$(\overline{x}_1 \cup \overline{x}_2 \cup \overline{x}_3) \text{ «R» } (x^3 + dx^2 + ex + f)$$

Si tomamos el producto como símbolo funcional tendremos

$$(x_1 \cup x_2 \cup \overline{x}_1 \cup \overline{x}_2 \cup \overline{x}_3) \text{ «R» } (x^2 + bx + c) \times (x^3 + dx^2 + ex + f)$$

ya que $(x^2 + bx + c) \times (x^3 + dx^2 + ex + f)$ es de quinto grado y, recordando el teorema fundamental del Algebra, sus soluciones serán, precisamente, la reunión de las soluciones de $(x^2 + bx + c)$ y de $(x^3 + dx^2 + ex + f)$.

Si en lugar de tomar el producto como símbolo funcional, hubiéramos tomado la suma, ya no se hubiera podido efectuar esta reunión; por ende la suma no será un símbolo característico de «R».

Ejemplo de desviación.—Supongamos ahora que «R» es la relación que expresa el siguiente juicio:

.... «son los máximos de la función» ....

Supongamos que $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ es un conjunto de funciones del plano, por ejemplo, funciones periódicas que tienen infinitos máximos cada una; llamemos $c_1, c_2 \ldots c_n$ a los conjuntos de puntos máximos de cada una de las $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$; tendremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \text{ «R» } \varphi_1 \\ c_2 \text{ «R» } \varphi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n \text{ «R» } \varphi_n \end{array} \right.$$

Tomando como segundo miembro de «R» la suma de las dos funciones φ_μ y φ_ν, o sea la función $\varphi_\mu + \varphi_\nu$ se pueden dar dos casos:

1. A $(\varphi_\mu + \varphi_\nu)$ la relación «R» hace corresponder la reunión de los máximos c_μ de φ_μ y de los c_ν de φ_ν, o sea:

$$(c_\mu \cup c_\nu) \text{ «R» } (\varphi_\mu + \varphi_\nu)$$

2. En general, los puntos máximos de la función $(\varphi_\mu + \varphi_\nu)$ no serán los mismos que los de las φ_μ y φ_ν; pero cada uno de estos puntos máximos determinará un máximo de $(\varphi_\mu + \varphi_\nu)$ que se obtendrá por transformación del mismo. Si llamamos K_μ^M y K_ν^M a dichas transformaciones, tendremos

$$(K_\mu^M c_\mu \cup K_\nu^M c_\nu) \text{ «R» } (\varphi_\mu + \varphi_\nu)^n$$

Efectivamente, las K_μ^M y K_ν^M serán las desviaciones de «R» respecto de la suma.

Más adelante veremos un ejemplo muy interesante de tales desviaciones.

XIV

CONJUNTOS RELATIVOS

El conjunto de condiciones lógicas $(P_1, P_2 \ldots P_\sigma)$ que constituyen la definición de un conjunto C, pueden ser cualesquiera; luego podemos suponer que las $(P_1, P_2 \ldots P_\sigma)$ son relaciones binarias acotadas.

Si, en forma implícita, hacemos $(P_1, P_2 \ldots P_\sigma) =$ «R», podremos definir C como el conjunto de todos los elementos $c_1, c_2, c_3 \ldots c_\tau$ que satisfacen la relación binaria «R», tomando como segundo miembro a otro conjunto dado $\varphi\sigma$, que llamaremos «base de la definición de C».

De esta forma, los $c_1, c_2 \ldots c_\tau$ vienen definidos por medio de la relación «R» y el conjunto base φ_σ; por este motivo calificaremos al conjunto C de «relativo», ya que su definición viene dada con relación a un segundo conjunto definido φ_σ. Pero esta definición contiene todavía algunas lagunas: en realidad llamaremos conjuntos relativos a los que satisfacen las siguientes propiedades:

1.ª C es definido, o sea que su definición «R» es una relación acotada y, por ende, según el teorema 4, susceptible de implicar otras relaciones o consecuencias lógicas.

2.ª Cada elemento de la base φ_σ determina un subconjunto C_σ de C que puede estar constituido por uno o más elementos y sólo eventualmente será vacío.

3.ª A los elementos de la base φ_σ se les puede aplicar un símbolo funcional de dos variables «cerrado» y característico F, que satisface las siguientes propiedades:

a) φ_σ es un «grupo» para la composición que en él realiza el símbolo funcional F.

b) F, como símbolo característico de «R», puede producir desviaciones.

Ejemplo: Son muchos los ejemplos que podemos ofrecer de conjuntos relativos; pero, saliéndonos un poco de la materia propia de esta monografía, pondremos como ejemplo uno extraido, precisamente, de la Física Teórica, concretamente de la Teoría de la Luz:

Este ejemplo, aunque se salga del marco abstracto de la Lógica Matemática, lo hemos elegido, por una parte, por considerarlo de gran interés; por otra parte, porque implica algunas consecuencias prácticas interesantes; veamos:

Es un hecho bien conocido, por la Teoría Ondulatoria de la Luz, que la velocidad de grupo puede ser distinta a la de onda (1).

Limitémonos a un tren de ondas planas representado por la ecuación

$$\sigma = \mathrm{A}\ \mathrm{sen}\ \frac{2\,\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

donde la variación de densidad σ viene dada en función de la amplitud A, del período τ, del camino x y de la velocidad de onda v.

Supongamos ahora dos trenes de onda indefinidamente largos. Para mayor facilidad atribuyámosles una misma amplitud. Sean τ_1 y τ_2 sus períodos respectivos; supongamos, además, que la velocidad de propagación sea una función del período, como aproximadamente ocurre en las ondas de agua: Al período τ_1 corresponde la velocidad v_1 y a el τ_2 la velocidad v_2.

Si introducimos las frecuencias en lugar de los períodos, haciendo $1/\tau_1 = n_1$ y $1/\tau_2 = n_2$ obtendremos las siguientes ecuaciones de onda:

$$y_1 = \mathrm{A}\ \mathrm{sen}\ 2\pi\, n_1 \left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

$$y_2 = \mathrm{A}\ \mathrm{sen}\ 2\pi\, n_2 \left(t - \frac{x}{v_2}\right)$$

La interferencia de estas ondas será

$$\sigma = \mathrm{A}\left[\mathrm{sen}\ 2\pi\, n_1 \left(t - \frac{x}{v_1}\right) + \mathrm{sen}\ 2\pi\, n_2 \left(t - \frac{x}{v_2}\right)\right]$$

(1) Este ejemplo lo hemos extraido de la obra de Gustav Jäger *Física Teórica* (Teoría de la Luz).

Esta ecuación, por medio del teorema

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2} \times \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

la convertimos en

$$\sigma = 2\mathrm{A} \operatorname{sen}\pi \left[(n_1 + n_2)\, t - \left(\frac{n_1}{v_1} + \frac{n_2}{v_2}\right) x\right] \times$$

$$\times \cos\pi \left[(n_1 - n_2)\, t - \left(\frac{n_1}{v_1} - \frac{n_2}{v_2}\right) x\right]$$

Haciendo

$$(n_1 + n_2) = 2\, n \quad \text{y} \quad \frac{n_1}{v_1} + \frac{n_2}{v_2} = \frac{2\, n}{v}$$

obtendremos

$$\sigma = 2\mathrm{A} \operatorname{sen} 2\pi\, n \left(t - \frac{x}{v}\right) \times \cos\pi \left[(n_1 - n_2)\, t - \left(\frac{n_1}{v_1} - \frac{n_2}{v_2}\right) x\right]$$

Si consideramos el estado σ, en un punto dado del espacio, por ejemplo, para $x = 0$, resulta

$$\sigma = 2\mathrm{A} \cos\pi\, (n_1 - n_2)\, t \operatorname{sen} 2\pi\, n\, t$$

Hemos obtenido una onda de frecuencia n y de amplitud variable.

Si hacemos $n_0 = n_1 - n_2$ y suponemos que n_0 es muy pequeño respecto a n_1 y n_2, y además hacemos

$$\frac{n_1}{v_1} - \frac{n_2}{v_2} = \frac{n_0}{u}$$

la anterior ecuación se convierte en

$$\sigma = 2\mathrm{A} \cos\pi\, n_0 \left(t - \frac{x}{u}\right) \operatorname{sen} 2\pi\, n \left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Esta ecuación representa un tren de ondas de longitud indefinida y de amplitud variable periódicamente. La amplitud «máxima» se propaga en la dirección del eje x, con la velocidad u; pero esta es, en general, distinta de v.

Según esto, la onda

$$y_1 = \mathrm{A} \cos 2\pi\, n_1 \left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

cuyos máximos se propagan *«aisladamente»* con una velocidad v_1; y la

$$y_2 = A \cos 2\pi\, n_2 \left(t - \frac{x}{v_2}\right)$$

cuyos máximos o amplitudes máximas se propagan con velocidad v_2, al sumarlas, o sea al interferirse, los puntos máximos o amplitudes máximas se propagarán con las velocidades v y u, que en general serán distintas a las que tenía cada onda por separado, v_1 y v_2.

Luego la relación que existe entre una función de onda y sus puntos máximos, o mejor dicho, la relación que define el conjunto de puntos máximos de una onda, en el espacio y en el tiempo, sufre una desviación al interferirse:

Supongamos que K_1 y K_2 son dos operadores que transforman a v_1 en u y a v_2 en v:

$$\begin{cases} K_1\, v_1 = v \\ K_2\, v_2 = u \end{cases}$$

estos operadores serán las desviaciones producidas. Implícitamente podemos expresar todo esto así:

Si hacemos $y_1 = \varphi_1$ y $y_2 = \varphi_2$ con la relación R antes definida y llamando C_1 al conjunto de puntos máximos de φ_1 y C_2 al de φ_2, tendremos

$$C_1 \text{ «}\overline{R}\text{» } \varphi_1 \quad ; \quad C_2 \text{ «}\overline{R}\text{» } \varphi_2$$

y

$$(K_1\, C_1 \cup K_2\, C_2) \text{ «}\overline{R}\text{» } (\varphi_1 + \varphi_2)$$

donde $+$ es el símbolo funcional característico.

Efectivamente, siempre podremos elegir un conjunto de funciones de onda que sean un grupo para la operación binaria de sumar; por otra parte, cada función de onda determinará un subconjunto de puntos máximos que se desplazarán con cierta velocidad (velocidad de la onda). Las variaciones de dicha velocidad, producidas por interferencia, serán las variaciones de posición de dichos máximos, por ende, las desviaciones producidas. El conjunto de todos los puntos máximos del grupo de ondas constituirá, por consiguiente, un grupo «relativo».

Del estudio de las desviaciones en conjuntos relativos, podemos deducir los fenómenos que se obtienen por interferencia de ondas. Téngase en cuenta que en el fenómeno que acabamos de estudiar se producen ciertas «interacciones» entre puntos materiales relativos (puntos máximos de una onda) «que se explican sin necesidad de atribuirles campos de fuerza». Podemos construir conjuntos de puntos de esta clase, o sea definidos por relaciones cuyas interferencias produzcan toda clase de desviaciones y «siempre que las cotas de la relación que los define sean iguales a las de la axiomática de la mecánica que rija en dichos puntos las consecuencias lógicas a obtener, ambas serán «equivalentes» teniendo en cuenta el teorema 4; por ende, los mismos resultados se obtendrán por interferencia de las funciones que sirvan de base a la definición de dichos puntos, que por resolución de las ecuaciones que determinen los campos de fuerza correspondientes.

Esto es importante si consideramos el actual estado de las ciencias físicas y vemos en los conjuntos relativos una posible imagen puramente matemática de los fenómenos físicos, o lo que es lo mismo: «una formulación cimentada en una axiomática puramente matemática de los fenómenos que parecen requerir hipótesis, axiomas o condiciones lógicas de índole física. Pero estas afirmaciones las hacemos únicamente a título heurístico, pues no es este el tema a tratar en la presente monografía.

X V

DESCOMPOSICION DE CONDICIONES LOGICAS

Dos condiciones lógicas de una sola variable proposicional son compatibles, siempre que sus cotas no sean disjuntas. Esto se comprende fácilmente, pues si A_{E_1} y A_{E_2} son dos de tales condiciones y E_1 y E_2 sus cotas respectivas, dentro de la intersección $(E_1 \cap E_2)$, cada elemento satisface a la vez, A_{E_1} y A_{E_2}, sin necesidad de exigir que ambas determinen una misma correspondencia, como ocurre en las relaciones binarias, ya que se refieren a una sola cota y dicha condición no tiene sentido

Dada una condición lógica A_E, cuya cota sea E, recordando la definición de cota, tendremos:

Para todo X:

$$(X \vdash A_E) \Leftrightarrow (X \in E)$$

Supongamos que existen n condiciones lógicas A_{E_1}, $A_{E_2} \ldots E_{E_n}$, cuyas cotas son E_1, $E_2 \ldots E_n$, y tales que satisfacen las siguientes propiedades:

1.ª E contiene a todas las cotas E_1, $E_2 \ldots E_n$, o sea:

$$E_1 \subset E \quad ; \quad E_2 \subset E \quad ; \quad \ldots E_n \subset E$$

por consiguiente, de acuerdo con el teorema 5.º, cada una de las A_{E_1}, $A_{E_2} \ldots$ *implicará* a la A_E:

$$(A_{E_1} \wedge A_{E_2} \wedge \ldots A_{E_n}) \longrightarrow A_E$$

2.ª Las A_{E_1}, $A_{E_2} \ldots A_{E_n}$ satisfacen la siguiente relación lógica:

Para todo X:

$$(X \vdash A_{E_\beta}) \longrightarrow (X \vdash A_E)$$

donde

$$(\beta = 1, 2 \dots n)$$

Esto quiere decir que todo elemento que satisface cualquiera de las A_{E_1}, $A_{E_2} \dots A_{E_n}$ deberá también satisfacer A_E; por ejemplo: Si $P_1(x)$, $P_2(x) \dots P_n(x)$ son polinomios cualesquiera y $P(x)$ es su producto:

$$P(x) = P_1(x) \times P_2(x) \times \dots P_n(x)$$

las raíces de cualquiera de los $P_1(x)$, $P_2(x) \dots$ también serán raíces de $P(x)$; en otras palabras: Si X_1 satisface alguna de las ecuaciones

$$P_\beta(x) = 0 \quad \text{para} \quad (\beta = 1, 2 \dots n)$$

deberá satisfacer también la ecuación

$$P(x) = P_1(x) \times P_2(x) \dots \times P_n(x) = 0$$

cosa que deducimos del Teorema Fundamental del Algebra.

3.ª La reunión de las cotas E_1, $E_2 \dots E_n$ es igual a E:

$$\bigcup_n E_n = E$$

Según esto, el conjunto de las A_{E_1}, $A_{E_2} \dots A_{E_n}$ será equivalente a la A_E.

Un conjunto de condiciones lógicas, tales como las A_{E_1}, $A_{E_2} \dots A_{E_n}$, que satisfacen las tres propiedades descritas, diremos que son una «descomposición de A_E».

Supongamos que existe un conjunto de fórmulas B_n y un conjunto de símbolos funcionales F, F^2, $F^3 \dots F_n$, tales que cualquiera de las composiciones o aplicaciones

$$F_m (B_1, B_2 \dots B_m, A_E) \quad \text{para} \quad (m = 1, 2 \dots n - 1)$$

sea equivalente a la A_E:

$$F_m (B_1, B_2 \dots B_m, A_E) \Longleftrightarrow A_E$$

Las fórmulas compuestas

$$F_m (B_1, B_2 \dots B_m, A_E)$$

diremos que son «semejantes» a la A_E y a los símbolos funcionales F, $F^2 \dots F_n$ los llamaremos «símbolos funcionales covariantes de A_E».

Ejemplo:

Si $P(x) = 0$ es una ecuación algebraica y C_n un conjunto de números cualesquiera, las ecuaciones

$$C_n \times P(x) = 0 \qquad [1]$$

serán equivalentes a la $P(x) = 0$, puesto que una ecuación algebraica se puede multiplicar por un número cualquiera sin que se alteren sus soluciones; por consiguiente las (1) serán semejantes a $P(x) = 0$ y el símbolo funcional X (producto) será el símbolo covariante.

Teorema 12.—Si $A_{E_1}, A_{E_2} \ldots A_{E_n}$ es la descomposición de n elementos de una condición lógica A_E, y cada condición $A_{E_1}, A_{E_2} \ldots$ acepta como símbolo covariante a un símbolo de n variables funcionales F_n y las A_{E_β} pueden ser semejanzas en la composición $F_n(A_{E_1}, A_{E_2} \ldots A_{E_n})$ «esta composición» y la condición lógica A_E serán equivalentes, o sea:

$$F_n\,(A_{E_1}, A_{E_2} \ldots A_{E_n}) \Longleftrightarrow A_E$$

Demostración:

Según la propiedad 3.ª, todo elemento de E pertenecerá a alguno de los $E_1, E_2 \ldots E_n$; por consiguiente, deberá satisfacer a alguna de las $A_{E_1}, A_{E_2} \ldots A_{E_n}$. Supongamos que e es uno de tales elementos, que, además de satisfacer A_E, satisface A_{E_β}; por ende, deberá satisfacer la composición

$$F_n\,(A_{E_1} \ldots A_{E_\beta} \ldots A_n)$$

ya que ésta, por hipótesis, es una equivalencia de A_{E_β}, por ser F_n un símbolo funcional covariante. Como se puede decir lo mismo de cualquier otro elemento de E, la cota de A_E será igual a la de $F^n(A_{E_1}, A_{E_2} \ldots \ldots A_{E_n})$, y como todas las condiciones lógicas que intervienen son de una variable proposicional y, por ende, compatibles; de acuerdo con el teorema 4.º, las condiciones A_E y $F^n(A_{E_1}, A_{E_2} \ldots)$ serán equivalentes:

$$A_E \Longleftrightarrow F^n(A_{E_1}, A_{E_2} \ldots A_{E_n})$$

que es lo que pretendíamos demostrar.

La descomposición de una función en producto de Weierstrasse o en serie de fracciones de Mitag-Lefter son casos particulares del presente teorema, como habrá intuido el lector a través de los ejemplos que hemos citado en el presente capítulo. Considérese que, dado el carácter abstracto de este teorema, nos permite obtener aplicaciones en infinidad de condiciones lógicas y obtener descomposiciones de expresiones o fórmulas cualesquiera.

Por otra parte, de aquí podemos deducir importantes consecuencias para el análisis de las desviaciones determinadas en la relación que define un conjunto relativo, como vamos a ver a continuación.

XVI

EN TORNO A LAS DESVIACIONES

Dada una relación binaria

$$a_\mu \text{ «R» } b_\mu$$

consideremos la axiomática que condiciona los elementos que pueden satisfacerla en uno de sus miembros; por ejemplo: Supongamos que A_a es la axiomática que determina o define los elementos capaces de satisfacerla en su primer miembro, tendremos:

Para todo X:

$$(X \vdash A_a) \longrightarrow (X \vdash \text{«R»})$$

Supongamos ahora que «R» es la definición de un conjunto relativo que tiene como base al conjunto b_μ; supongamos, también, que F es el símbolo funcional característico de dicha definición; se pueden dar dos casos:

1.º Si F es covariante respecto a los a_μ, tendremos:

$$a_\mu \vdash A_a$$

$$a_\nu \vdash A_a$$

y de aquí que

$$F(a_\mu, a_\nu) \vdash A_a$$

de donde

$$F(a_\mu, a_\nu) \vdash \text{«R»}$$

y, finalmente,

$$F(a_\mu, a_\nu) \text{ «R» } (b_\mu \cup b_\nu)$$

Luego podemos afirmar que cuando el símbolo funcional característico es covariante no se produce desviación alguna.

2.º Supongamos que el símbolo covariante para las a_μ es un símbolo funcional G distinto del característico F, tendremos:

$$F(a_\mu, a_\nu) \text{ «R» } (K_\mu\, b_\mu \cup K_\nu\, b_\nu)$$

y, por otra parte,

$$G(a_\mu, a_\nu) \text{ «R» } (b_\mu \cup b_\nu)$$

puesto que

$$G \neq F$$

Las desviaciones K_μ, K_ν que se pueden obtener pueden ser cualesquiera eligiendo convenientemente a los F y G. Esto no pone en condiciones de determinar una axiomática que implique, en todo espacio físico, las mismas consecuencias lógicas, que las deducidas de una axiomática o hipótesis físicas. Para ello basta aplicar convenientemente los teoremas estudiados en la presente monografía sobre equivalencia e implicaciones en condiciones lógicas.

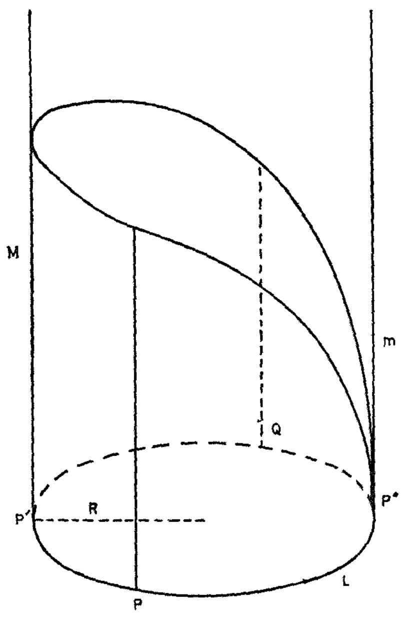
SOBRE FUNCIONES CONTINUAS EN EL CIRCULO

por

J. P. Vilaplana

Los teoremas que se refieren a funciones continuas sobre figuras del espacio euclídeo pertenecen a la Topología y pueden demostrarse por medio de métodos algebráicos topológicos, pero algunos de ellos se mantienen dentro de la geometría elemental, como courre en el caso que exponemos aquí.

Sea un dominio circular cerrado K en el plano euclídeo (Fig. 1). La frontera de K es la circunferencia L. A una función $\varphi(P)$ en el plano euclídeo, definida para todo $P \varepsilon K$, la llamamos *función continua en* K. Un



sentido positivo de recorrido nos orienta la circunferencia L y fija el sentido positivo para la medida de ángulos.

Dados dos puntos, P, Q, ε K, definimos la *distancia* $\varphi(PQ)$ como el ángulo $\varphi(O \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, que ha de girar Q en sentido positivo sobre L, en torno al centro de K, para que coincida con P.

Estudiemos, a continuación, el comportamiento de φ en L.

TEOREMA I.—*Si* $\varphi(\mathrm{P})$ *es continua en* K, *existe, para cada ángulo dado* $\varphi(O \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ *un par de puntos* P, Q ε K *en que la distancia* $\varphi(\mathrm{PQ}) = \varphi$ *sobre* L *es tal que:*

$$\varphi(\mathrm{P}) = \varphi(\mathrm{Q})$$

Elijamos A, B ε L, de modo que

$$\varphi(\mathrm{P''}) = \min \varphi(\mathrm{P}) \qquad \mathrm{P} \varepsilon \mathrm{L}$$

$$\varphi(\mathrm{P'}) = \max \varphi(\mathrm{P}) \qquad \mathrm{P} \varepsilon \mathrm{L}$$

Se verificará:

$$\varphi(\mathrm{P'Q'}) = \varphi(\mathrm{P''Q''}) = \varphi$$

y entonces:

$$\varphi(\mathrm{P'}) - \varphi(\mathrm{Q'}) \geqslant 0$$

y

$$\varphi(\mathrm{P''}) - \varphi(\mathrm{Q''}) \geqslant 0$$

Giremos ahora un par de puntos P, Q ε L, con $\varphi(PQ)$ constantes sobre L, de modo que primeramente coincidan con P' y Q' y después con P'' y Q''. Para una posición intermedia, se tendrá:

$$\varphi(\mathrm{P}) - \varphi(\mathrm{Q}) = 0$$

En los dos teoremas siguientes deduciremos el comportamiento de φ en K, apoyándonos en su comportamiento en L.

TEOREMA II —*Sean* $\varphi(\mathrm{P})$ *y* $\psi(\mathrm{Q})$ *dos funciones continuas en* K *y un ángulo constante* $\varphi(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ *tal que para cada par de puntos* P, Q *que satisfacen a la relación de distancia, se verifica que:*

$$\varphi(\mathrm{Q}) = -\varphi(\mathrm{P})$$

y

$$\psi(\mathrm{Q}) = -\psi(\mathrm{P})$$

existe, entonces, un punto tal que:

$$\varphi(\mathrm{P}) = \psi(\mathrm{P}) = 0$$

Demostrémoslo por reducción al absurdo. Supongamos que para cualquier $P \varepsilon K$:

$$[\varphi(P)]^2 + [\psi(P)]^2 > 0$$

Definamos un vector no nulo $\vec{t} = \vec{t}(P) = \varphi(P)\,\vec{x} + \psi(P)\,\vec{y}$ siendo $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores unitarios ortonormales del plano, con lo que existe ahora en K un campo vectorial continuo.

Sea P_0 el centro de K y pasemos sobre un radio de P_0 a P, entonces el vector correspondiente al punto en movimiento gira constantemente en cuanto que la función dirección de $\vec{t}(P_0)$ pasa a la de $\vec{t}(P)$. Si $\omega\,(P)$ es el ángulo, medido en sentido positivo, que gira, en total, el vector del campo, queda con $\omega\,(P)$ una función unívocamente definida en K y continua en él, con $\omega(P_0) = 0$ y guardando la exigida invariabilidad sobre todos los radios de K. Según el teorema I, existe un par de puntos P, $Q \in$ L tales que $\varphi(PQ) = 0$ y $\omega(P) = \omega(Q)$, de modo que los vectores $\vec{t}(P)$ y $\vec{t}(Q)$ son paralelos.

Pero de la definición de $\vec{t}(P)$ y de la hipótesis del teorema resulta que $\vec{t}(P)$ y $\vec{t}(Q)$ son opuestos, lo que está en contradicción.

TEOREMA III.—*Sean* φ(P), ψ(P) *y* χ(P) *tres funciones continuas en* K, *y un ángulo constante* $\varphi(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, *de modo que para cada par de puntos* P, Q ε L, *que cumplan la condición de distancia* $\varphi(PQ) = \varphi$, *se verifican las relaciones:*

$$\varphi(Q) = \psi(P)$$

$$\psi(Q) = \chi(P)$$

$$\chi(Q) = \varphi(P)$$

y existe, entonces, un punto P ε K, *tal que:*

$$\varphi(P) = \psi(P) = \chi(P)$$

Procediendo de manera análoga a la del teorema anterior, tendremos que para $P \varepsilon K$ se verificaría siempre:

$$[\varphi(P) - \psi(P)]^2 + [\psi(P) - \chi(P)]^2 > 0$$

Tomando el punto P como origen del vector $\vec{t} = \vec{t}(P)$, se tendría:

$$\vec{t} = \vec{t}(P) = [\varphi(P) - \psi(P)]\,\vec{x} + [\psi(P) - \chi(P)]\,\vec{y}$$

que engendraría así en K un campo vectorial continuo, pudiendo elegirse un par de puntos P, $Q \varepsilon L$, de modo que los vectores $\vec{t}(P)$ y $\vec{t}(Q)$ fuesen paralelos.

Según la forma de $\vec{t}$ ha de verificarse:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi(P) - \psi(P) & \psi(P) - \chi(P) \\ \varphi(Q) - \psi(Q) & \psi(Q) - \chi(Q) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi(P) - \psi(P) & \psi(P) - \chi(P) \\ \psi(P) - \chi(P) & \chi(P) - \varphi(P) \end{vmatrix} = 0$$

o sea

$$-2\,\Delta = [\varphi(P) - \psi(P)]^2 + [\psi(P) - \chi(P)]^2 + [\chi(P) - \varphi(P)]^2$$

lo que contradice lo supuesto.