CARACTERIZACION VECTORIAL DE LOS GIROS EN EL ESPACIO

por

ISMAEL GONZALEZ ROLDAN

Vamos a establecer una correspondencia biunívoca entre los giros y los vectores deslizantes del espacio y vamos a tratar de encontrar una operación entre vectores de rectas concurrentes, cuyo resultado se corresponda con el producto de los giros homólogos de los datos, con lo cual para cada punto del espacio existirá un isomorfismo entre los giros de ejes concurrentes en ese punto y sus vectores correspondientes.

Hagamos corresponder a cada giro un vector deslizante cuya recta sea el eje del giro, cuyo sentido sea aquel en el que avanzaría un sacacorchos que girase en el sentido de la rotación, y cuyo módulo sea la tangente trigonométrica de la mitad del ángulo de giro. Consideraremos como iguales dos giros coaxiales cuando la diferencia de sus ángulos, si éstos son del mismo sentido, o su suma, si son de sentido contrario, sea un número entero de vueltas; cada una de estas clases de equivalencia tendrá un representante de ángulo no superior a 180.º En estas condiciones es fácil comprobar que a todos los giros de una misma clase les corresponde un único vector y que a cada vector le corresponde una clase y solo una. A las simetrías axiales consideradas como giros de 180.º les corresponden vectores de módulo infinito y sentido indeterminado, siendo, por tanto, los giros de ángulo máximo. Al giro de ángulo nulo, y a todos los de su clase, les corresponde un vector de módulo nulo.

Para encontrar la fórmula de composición de giros concurrentes, vamos a empezar por el caso sencillo en el que los giros componentes sean dos simetrías. San $\vec{s}_1$ y $\vec{s}_2$ sus vectores y sea φ el ángulo que forman, queremos encontrar el vector $\vec{g}$ del giro resultante, el módulo de este vector ha de ser la tangente del ángulo mitad del giro, pero el ángulo de giro es $2\ \varphi$, por tanto, el módulo de $\vec{g}$ será $|\vec{g}| = \operatorname{tg} \varphi$; su dirección es perpendicular a $\vec{s}_1$ y $\vec{s}_2$, es decir, será la misma que la del producto vectorial de ambos, como el módulo de este producto vectorial es el producto de los módulos por el seno del ángulo que forman, es decir,

$$|\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2| = |\vec{s}_1| \; |\vec{s}_2| \text{ sen } \varphi$$

si esto lo dividimos por el producto de los módulos multiplicado por el coseno del ángulo que forman, lo cual constituye su producto escalar, quedará precisamente la tangente de φ, es decir, el módulo de $\vec{g}$ podemos, por tanto, escribir:

$$\vec{g} = \frac{\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2}{\vec{s}_1 \,.\, \vec{s}_2}$$

Esta expresión da, pues, el vector del giro en función de los vectores de las simetrías; haciendo el producto vectorial del numerador (no conmutativo) en el orden en que se ha escrito. el vector $\vec{g}$ del primer miembro representa al giro resultante de componer las simetrías aplicando primero la $\vec{s}_1$ y después la $\vec{s}_2$. No constituye indeterminación el hecho de que los dos vectores de las simetrías puedan tener ambos sentidos, pues si, por ejemplo, se toman los sentidos que forman ángulo agudo, el producto escalar del denominador es positivo y el vector $\vec{g}$ tiene el mismo sentido del numerador, si, por el contrario, se toman los sentidos de las simetrías que forman ángulo obtuso, cambia el sentido del numerador, pero entonces el producto escalar es negativo y el sentido de $\vec{g}$ será el mismo que antes. Por otra parte, como los módulos de las simetrías son iguales y aparecen dos veces como factor en el numerador y otras dos en el denominador, su valor no influye en el módulo de $\vec{g}$; podemos, por tanto, prescindir de él y sustituir los vectores de las simetrías por otros unitarios que tengan su misma dirección.

Podemos ya atacar el problema más general de componer dos giros cualesquiera concurrentes en un punto 0. Sean 2α y 2β sus ángulos y sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sus vectores. cuyos módulos serán, según sabemos:

$$|\vec{x}| = x = \text{tg}\alpha \; ; \; |\vec{y}| = \text{tg}\beta$$

Se trata de encontrar el vector $\vec{z}$ representativo del producto de los dos giros, en función de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Supongamos que se aplica primero el giro de vector $\vec{x}$ y después el otro.

Consideremos cada uno de los giros componentes como producto de dos simetrías, de las que la segunda del primero sea la misma que la primera del segundo. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores unitarios que tengan, respectivamente, la dirección de las tres simetrías. Según todo lo que hemos visto, podremos escribir:

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \; ; \; \vec{y} = \frac{\vec{b} \wedge \vec{c}}{\vec{b} \cdot \vec{c}} \; ; \; z = \frac{\vec{a} \wedge \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{c}}$$

Vamos a calcular los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ en función de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

El vector b es unitario y perpendicular $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Un vector perpendicular a estos últimos es su producto vectorial, el cual será unitario si lo dividimos por su módulo, luego:

$$\vec{b} = \frac{\vec{x} \wedge \vec{y}}{\left|\vec{x} \wedge \vec{y}\right|} = \frac{\vec{x} \wedge \vec{y}}{\sqrt{\left(\vec{x} \wedge \vec{y}\right) \cdot \left(\vec{x} \wedge \vec{y}\right)}} = \frac{\vec{x} \wedge \vec{y}}{\sqrt{x^2\, y^2 - \left(\vec{x} \cdot \vec{y}\right)^2}}$$

Para determinar $\vec{a}$ vamos a usar como triedro de referencia el formado por los tres vectores perpendiculares entre sí: $\vec{x}$, $\vec{b}$ y $\vec{b} \wedge \vec{x}$, como $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{x}$, estará en el plano de los dos últimos. Llamemos $\vec{u}$ al vector unitario en la dirección de $\vec{b} \wedge \vec{x}$, el módulo de este último es el de $\vec{x}$, por ser $\vec{b}$ unitario y perpendicular a $\vec{x}$, por tanto:

$$\vec{u} = \frac{\vec{b} \wedge \vec{x}}{\left|\vec{x}\right|} = \frac{1}{\left|\vec{x}\right|} \; \frac{(\vec{x} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{x}}{\sqrt{x^2\, y^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2}} =$$

$$= \frac{x^2\, \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\, \vec{x}}{\left|\vec{x}\right| \sqrt{x^2\, y^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2}}$$

El vector $\vec{a}$ expresado como combinación lineal de $\vec{b}$ y de $\vec{u}$ es

$$\vec{a} = \lambda\, \vec{b} + \mu\, \vec{u}$$

donde λ y μ son los cosenos de los ángulos que $\vec{a}$ forma con $\vec{b}$ y $\vec{u}$, ahora bien, el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es φ, cuya tangente es $|\vec{x}|$, luego:

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \; ; \; \mu = \operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{x}|}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{x} \wedge \vec{y} + x^2\, \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\, \vec{x}}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{x^2\, y^2 - \left(\vec{x} \cdot \vec{y}\right)^2}}$$

De forma parecida se calcula $\vec{c}$, resultando:

$$\vec{c} = \frac{\vec{x} \wedge \vec{y} + y^2\, \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\, \vec{y}}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{x^2\, y^2 - \left(\vec{x}\ \vec{y}\right)^2}}$$

Sustituyendo estos valores de a y c en la expresión

$$\vec{z} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{c}}$$

y realizando operaciones queda la fórmula definitiva:

$$\boxed{\vec{z} = \frac{\vec{x} + \vec{y} - \vec{x} \wedge \vec{y}}{1 - \vec{x} \cdot \vec{y}}} \qquad [1]$$

que resuelve el problema que nos habíamos propuesto y de cuya simple observación se desprenden las propiedades de la composición de giros de ejes concurrentes; por ejemplo, se ve que el eje del giro producto no está en el plano determinado por los ejes de los giros componentes, pues tiene una componente normal a dicho plano, excepto en el caso de que los factores sean coaxiales. También se desprende que el producto de giros no es conmutativo, pues cambia de sentido la componente normal al plano de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. En el caso particular de que los giros componentes sean coaxiales, y recordando que los módulos de los vectores son tangentes de ángulos mitades, resulta:

$$\vec{z} = \frac{\vec{x} + \vec{y}}{1 - \vec{x} \cdot \vec{y}} \; ; \; |\vec{z}| = \frac{|\vec{x}| + |\vec{y}|}{1 - |\vec{x}| \, |\vec{y}|} \; ; \; \mathrm{tg}\, r = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \; \mathrm{tg}\beta}$$

de donde se deduce que el giro resultante es coaxial con los componentes y su ángulo es la suma de los de éstos, como debía suceder.

Otra cuestión interesante que resuelve la fórmula vectorial es la de saber qué condiciones tienen que cumplir dos giros concurrentes para que su producto sea una simetría; se ve inmediatamente que esto ocurrirá cuando el producto escalar de los vectores componentes valga uno, es decir, cuando el producto de las tangentes de los ángulos mitades de los giros multiplicado por el coseno del ángulo que forman sus ejes sea la unidad.

Resumiendo, podemos establecer que el conjunto de los vectores deslizantes concurrentes en un punto y dotados de la operación definida por la fórmula [1], es isomorfo con el conjunto de los giros de ejes concurrentes en el mismo punto, dotado de la operación producto de giros. Ambos conjuntos tienen estructura de grupo no conmutativo, cada uno con respecto a su operación.