PROBLEMA CURIOSO

por

S SEGURA

Hallar el radio de una circunferencia que tenga su centro B *sobre una circunferencia dada* A, *y que divida al círculo* A *en dos partes equivalentes.* (Propuesto por unos alumnos.)

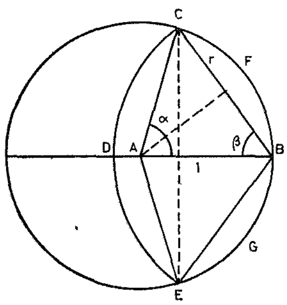

Fig. 1

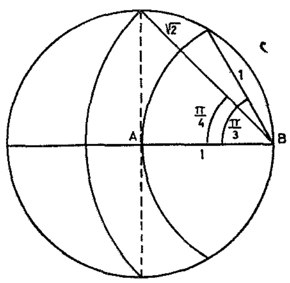

Fig. 2

SOLUCIÓN:

Se supone que el radio de $C(A)$ es 1, y el radio de $C(B)$, r (Fig. 1).

$$\text{Ar. } C(A,\, 1) = \pi$$

$$\text{Ar. } BFCDEGB = \text{Ar. sec. } BCDE + 2 \text{ Ar. seg. } BCF \qquad [\mathrm{I}]$$

Teniendo en cuenta que

$$\text{Ar. sec. } BCDE = \beta\, r^2$$

$$\text{Ar. seg. } BCF = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\, r \text{ sen } \beta$$

$$\text{Ar. } BFCDEGB = \frac{1}{2} \text{ Ar. } C(A,\, 1) = \pi/2$$

la igualdad [I] se puede escribir:

$$\beta r^2 + \alpha - r \operatorname{sen} \beta = \frac{\pi}{2} \qquad [II]$$

En Δ ABC se verifica:

$$\alpha + 2\beta = \pi \Rightarrow \alpha = \pi - 2\beta$$

$$\cos \beta = \frac{r}{2} \Rightarrow r = 2 \cos \beta$$

Sustituyendo en [II] para eliminar α y r:

$$2\beta \cos 2\beta - \operatorname{sen} 2\beta + \frac{\pi}{2} = 0$$

Si se pone $2\ \beta = x$, resulta la ecuación:

$$x \cos x - \operatorname{sen} x + \frac{\pi}{2} = 0 \qquad [III]$$

Esta ecuación es trascendente, pero en la figura 2 se ve que

$$\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{3} \Rightarrow 1{,}57 < x < 2{,}10$$

A partir de esta acotación inicial y con ayuda de las tablas de Losch (Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen), que dan los valores de las razones trigonométricas en función de los arcos expresados en radiantes, se obtienen los siguientes valores aproximados para x:

$$1{,}8, \quad 1{,}9, \quad 1{,}91, \quad 1{,}905, \quad 1{,}906, \quad 1{,}9057$$

$$r = 2 \cos x/2 \cong 1{,}159$$

Luego el radio de la circunferencia B es igual a 1,159 por el radio de la circunferencia A.