NOTA SOBRE METRICAS HILBERTIANAS

por

J. P. VILAPLANA

Al estudiar las métricas proyectivas definidas en un dominio convexo del plano afín A^2 es necesario establecer algunas propiedades referentes a las métricas sobre una línea recta, que exponemos a continuación.

Sea r una recta sobre el plano y sea I uno de los intervalos en r con extremos X e Y. Consideremos una metrización de I, bajo la cual se convierte en una recta métrica. Si A y B son puntos de I, diferentes de X e Y (Fig. 1), con B entre X y A, se tiene:

$$(A\ B\ X\ Y) > 1 \qquad [1a]$$

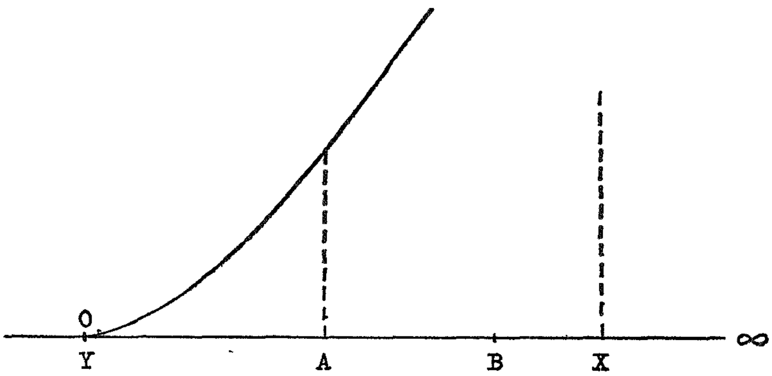

Fig. 1

y

$$(A\ B\ X\ Y) = 1 \qquad [1b]$$

y si D es un quinto punto de r, se verificará:

$$(A\ D\ X\ Y) \, . \, (D\ B\ X\ Y) = (A\ B\ X\ Y) \qquad [2]$$

como fácilmente puede comprobarse. En particular, si D es el punto del infinito de r, entonces, para alguna métrica euclidiana en A^2, la igualdad [2] se reduce a:

$$(\mathrm{A\ B\ X\ Y}) = (\mathrm{A}\ \infty\ \mathrm{X\ Y}) \,.\, (\infty\ \mathrm{B\ X\ Y}) = \frac{\mathrm{AX}}{\mathrm{AY}} \cdot \frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{BX}} > 1 \qquad [3]$$

Para $A = B$ la expresión [3] se reduce a la igualdad [1*b*]. Si X' está entre B y X, se tendrá:

$$(\mathrm{A\ B\ X'\ Y}) > (\mathrm{A\ B\ X\ Y}) \qquad [4]$$

Fig. 2

Como:

$$(\mathrm{A\ B\ X'\ Y}) = \frac{\mathrm{AX'}}{\mathrm{BX'}} \cdot \frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{AY}}$$

y

$$(\mathrm{A\ B\ X\ Y}) = \frac{\mathrm{AX'} + \mathrm{X'X}}{\mathrm{BX'} + \mathrm{X'X}} \cdot \frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{AY}}$$

haciendo $AX' = \lambda$, $BX' = \mu$ y $X'X = \delta$, y sustituyendo en estas relaciones, resulta:

$$(\mathrm{A\ B\ X'\ Y}) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{AY}}$$

y

$$(\mathrm{A\ B\ X\ Y}) = \frac{\lambda + \delta}{\mu + \delta} \cdot \frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{AY}}$$

y al ser $\delta > 0$ y $\lambda > \mu > 0$, se sigue:

$$\frac{\lambda + \delta}{\mu + \delta} < \frac{\lambda}{\mu}$$

que, con las anteriores expresiones para $(A\ B\ X'\ Y)$ y $(A\ B\ X\ Y)$, implica [4]. Análogamente, si Y' está situado entre A e Y (Fig. 2), resulta:

$$(\mathrm{A\ B\ X\ Y'}) > (\mathrm{A\ B\ X\ Y}) \qquad [5a]$$

y

$$(\mathrm{A\ B\ X'\ Y'}) > (\mathrm{A\ B\ X\ Y}) \qquad [5b]$$

Para la misma disposición de A, B, X e Y consideremos la métrica $d(AB)$ en I definida por:

$$d(\mathrm{AB}) = \frac{k}{2} \log (\mathrm{A\ B\ X\ Y}) \qquad [6a]$$

$$d(\mathrm{BA}) = \frac{k}{2} \log (\mathrm{B\ A\ Y\ X}) \qquad [6b]$$

siendo $k > 0$, ya que al verificarse:

$$(\mathrm{A\ B\ X\ Y}) = \frac{1}{(\mathrm{B\ A\ Y\ X})}$$

las relaciones [6a] y [6b] son equivalentes a:

$$d(\mathrm{AB}) = \frac{k}{2} \left| \log (\mathrm{A\ B\ X\ Y}) \right|$$

para cualquier par AB en $S(XY)$.

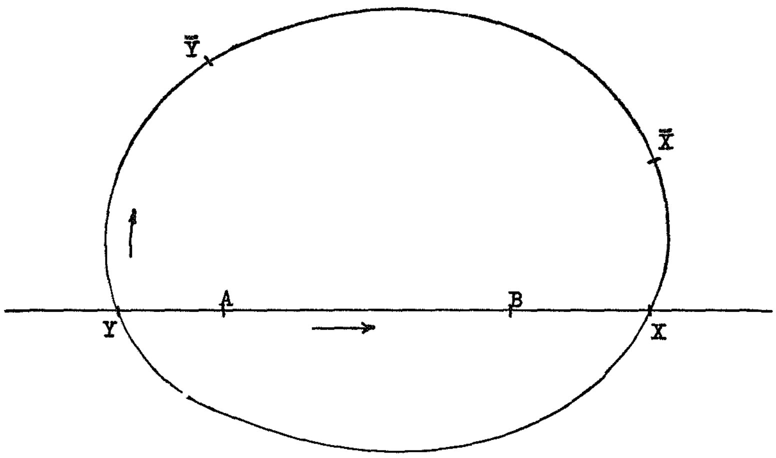

Fig. 3

De [1b] y [1a] se tiene:

$d(\mathrm{AB}) = 0$ para A equivalente a B.

$d(\mathrm{AB}) > 0$ para A no equivalente a B.

Fácilmente se demostraría $d(AB) = d(BA)$. De [2]:

$$d(\mathrm{AD}) + d(\mathrm{DB}) = d(\mathrm{AB})$$

estando D entre A y B. La desigualdad triangular subsiste para A, B y D en cualquier orden. Análogamente, para evaluar el ángulo de dos rectas (Fig. 4), teniendo en cuenta que el ángulo recto está expresado por $\pi/2$, es necesario tomar como constante de multiplicación del logaritmo el factor $1/2i$ en vez de $k/2$. Se tendrá así:

$$\widehat{AB} = \frac{1}{2i} \log (A\ B\ M\ N)$$

siendo M y N las tangentes imaginarias conjugadas trazadas por el vértice del ángulo al recinto convexo.

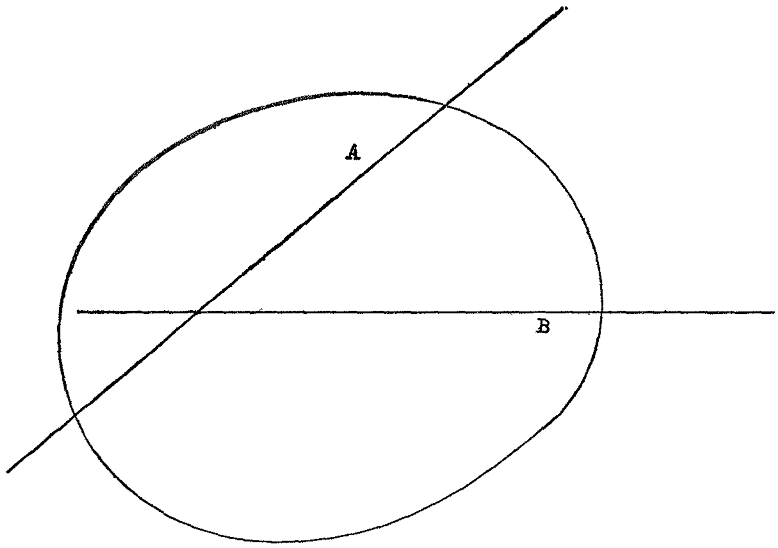

Fig. 4

Todas las propiedades de una métrica son entonces satisfechas por $d(AB)$.

Que I es una métrica recta en función de $d(AB)$ se sigue de la adición de distancia a lo largo de I, junto con el hecho de que:

$$(A\ B\ X\ Y) \longrightarrow \infty$$

cuando

$$B \longrightarrow X$$

o

$$A \longrightarrow Y$$

o

$$B \longrightarrow X$$
$$A \longrightarrow Y$$

Sea ahora **D** el interior de un recinto, dominio convexo en el plano afín con la curva K como su límite. En **D** se define una distancia $d(AB)$ como sigue: Sea X la intersección de K con el rayo AB e Y, la de K con el rayo BA (Fig. 5). La distancia $d(AB)$ viene definida por:

$$\frac{k}{2} \log (A\ B\ X\ Y).$$

La exposición anterior muestra que las dos primeras propiedades de una métrica se satisfacen en **D** para $d(AB)$ y también que la desigualdad

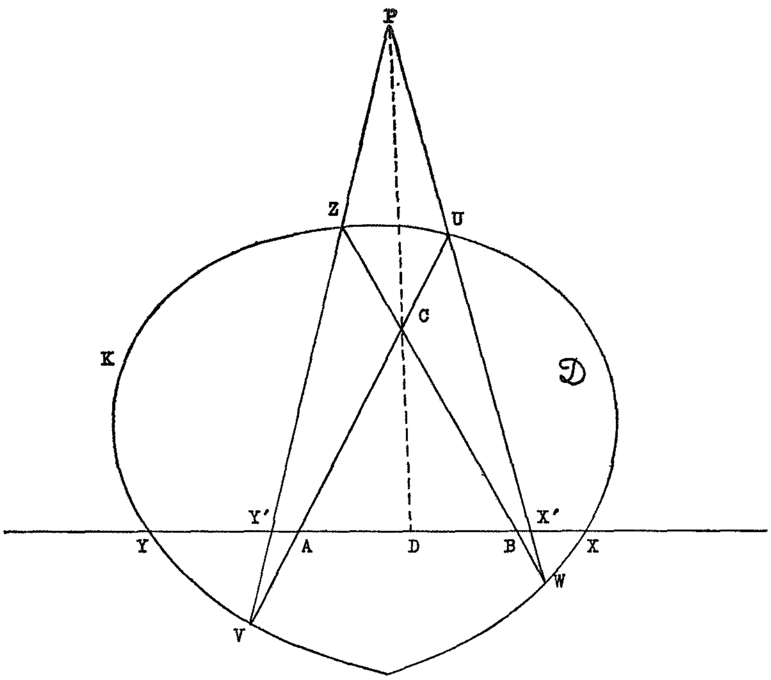

Fig. 5

triangular se conserva para los triples en $S(XY)$. Sea C, en **D**, un punto no perteneciente a $S^A (XY)$. Sean U, V, Z y W las respectivas intersecciones de K con los rayos AC, CA, BC y CB.

Sean:

$$P = (V \times Z) \times (W \times U)$$

$$Y' = (V \times Z) \times (X \times Y)$$

$$X' = (W \times U) \times (X \times Y)$$

$$D = (P \times C) \times (X \times Y)$$

Teniendo en cuenta [4], la perspectividad de $U \times V$ y $X \times Y$ desde P' resulta:

$$(\mathrm{A\ C\ U\ V}) = (\mathrm{A\ D\ X'\ Y'}) \geqslant (\mathrm{A\ D\ X\ Y})$$

Análogamente, por la perspectividad de $W \times Z$ y $X \times$ Y desde P, se tiene:

$$(\mathrm{C\ B\ W\ Z}) = (\mathrm{D\ B\ X'\ Y'}) \geqslant (\mathrm{D\ B\ X\ Y})$$

Multiplicando las dos últimas desigualdades y utilizando la igualdad [2] tenemos:

$$(\mathrm{A\ C\ U\ V}) \,.\, (\mathrm{C\ B\ W\ Z}) \geqslant (\mathrm{A\ D\ X\ Y}) \,.\, (\mathrm{D\ B\ X\ Y}) = (\mathrm{A\ B\ X\ Y})$$

de donde, tomando logaritmos en ambos miembros:

$$d(\mathrm{AC}) + d(\mathrm{CB}) \geqslant d(\mathrm{AB})$$

Cuando K no es estrictamente convexo se satisface el siguiente teorema:

TEOREMA. *Si* K *no contiene dos segmentos no alineados, entonces* d(AB) *es una métrica proyectiva en* **D**.

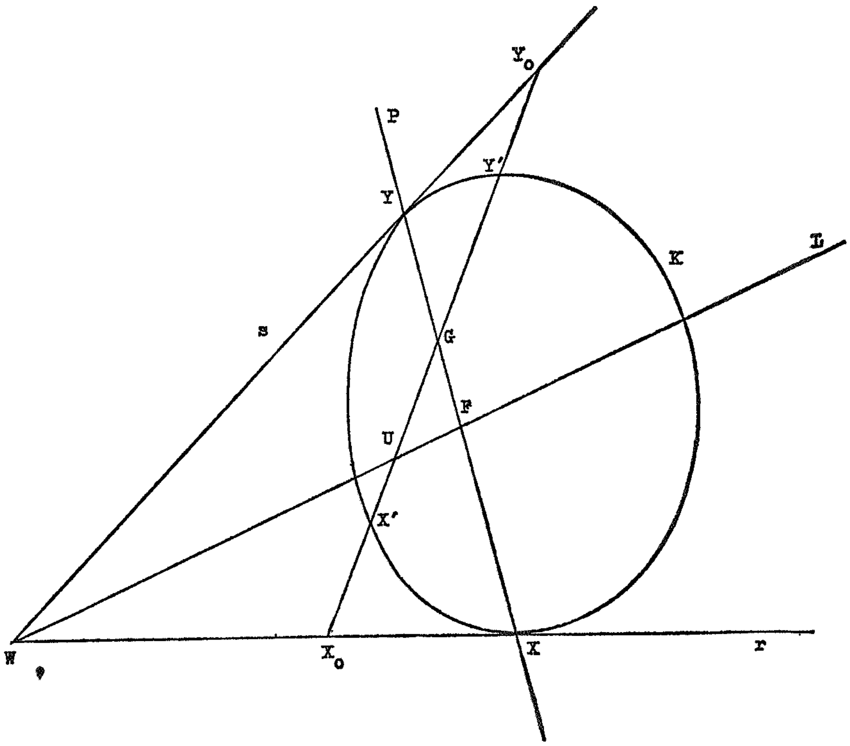

Fig. 6

En esta métrica $d(AB)$, debida a Hilbert, el caso más interesante es aquel en que K es una curva cerrada estrictamente convexa, y **D** es su interior. Las dos propiedades mas importantes son:

PROPIEDAD I. *Los circulos de una geometria hilbertiana son estrictamente convexos.*

Esta propiedad equivale a admitir la existencia de perpendiculares, es decir, es equivalente a la siguiente proposición:

PROPIEDAD II. *En una geometria hilbertiana, la linea* P *es perpendicular a la linea* L *si y sólo si* K *tiene, en sus intersecciones con* P, *lineas de apoyo concurrentes con* L.

Sean X e Y los puntos de intersección de K con P y sean r y s las líneas de apoyo. Supongamos que r y s son concurrentes en W. Si F es la intersección de P y L, entonces G no $\sim F$ en P y U no $\sim F$ en L, y deberemos demostrar que $d(GU) > d(GF)$. Supongamos que X está en GF e Y en FG e indiquemos por X' e Y' las intersecciones de K con GU y UG, respectivamente. Por último escribamos:

$$X_o = r \times (U \times G)$$

$$Y_o = s \times (U \times G)$$

De donde, por la perspectividad de $(G \times F)$ y $(G \times U)$ desde W y la condición [4], se verifica:

$$(G\ F\ X\ Y) = (G\ U\ X_o\ Y_o) > (G\ U\ X'\ Y')$$

lo que implica $d(GF) > d(GU)$, y de aquí que P sea perpendicular a L.

REFERENCIAS

1. BONOLA, R.: *Non Euclidean Geometry.* Dover Publications, Inc., New York, 1948.

2. BUSEMANN, H. & KELLY, P. J.: *Projective Geometry and Projective Metrics.* Academic Press, Inc., New York, 1953.