EL METODO AXIOMATICO Y ALGEBRA DE RELACIONES Y CONDICIONES LOGICAS

Por

JUAN-ESTEBAN PALOMAR TARANCON

(Continuación)

VII

RELACIONES IMPLICADAS E IMCOMPATIBLES

Cuando la existencia de una relación «R» entre dos subconjuntos o elementos $a\mu$ y $b\mu$ implica la existencia de otra relación «P» entre dos subconjuntos diferentes, $C\mu$ y $d\mu$, ambas serán *incompatibles*, pues están referidas a elementos distintos. Sin embargo, tanto la relación implicada como sus miembros vendrán determinados por la relación implicante. De esta forma, tendremos:

relación implicante: $a\mu$ «R» $b\mu$

relación implicada: $C\mu$ «P» $d\mu$

Los miembros $C\mu$ y $d\mu$ de la relación implicada no pueden ser cualesquiera, pues entonces esta sería indefinida, su campo de existencia ilimitado, por ende, existiría siempre, aun siendo falsa la relación implicante; por consiguiente, las cotas de «P» admitirán una definición, o sea que satisfacen un conjunto de condiciones lógicas con carácter exclusivo. Como estas condiciones lógicas definirán $C\mu$ y $d\mu$, partiendo de los elementos implicantes $a\mu$ y $b\mu$, serán condiciones lógicas de dos variables proposicionales, o sea: «relaciones binarias» y que llamaremos «relaciones determinantes de la relación implicada». Supongamos que para «R» dichas relaciones son «K» y «H», tendremos:

$$C\mu \text{ «K» } a\mu \ ; \ b\mu \text{ «H» } d\mu \ ,$$

$$C\mu \text{ «P» } d\mu$$

Esto lo podemos expresar también así:

$$\{(C\mu \vdash \text{«K»}) \wedge (d\mu \vdash H\mu)\} \longrightarrow \{(C\mu \wedge d\mu) \vdash \text{«P»}\}$$

Teorema 6.º Si los elementos de $a\mu$ y de $b\mu$ están en relación «R» y los de $C\mu$ y de $d\mu$ en relación «P», ambas relaciones son acotadas o definidas e incompatibles y «R» implica «P», cada $C\mu$ estará en relación «K», con cada $a\mu$, y cada $b\mu$ en relación «H» con cada $d\mu$, y tanto «K» como «H» serán definidas y dependerán de «R».

Demostración:

Si el primer miembro $a\mu$ de la relación implicante «R» y el primer miembro de la implicada $C\mu$, no estuvieran en relación defnida

$$C\mu \; \text{«K»} \; a\mu$$

esta relación podría ser satisfecha por cualquier elemento imaginable y, por ende, la relación implicada «P» en su primer miembro, por lo menos, también sería satisfecha por cualquier elemento imaginable, consiguientemente, sería indefinida, lo que está en contra de la hipótesis dada.

De acuerdo con el anterior teorema y encadenando las relaciones «K», «R» y «H», tendremos:

$$C\mu \; \overbrace{\text{«K»} \; a\mu \; \text{«R»} \; b\mu \; \text{«H»}} \; d\mu \qquad [1]$$

Si consideramos la expresión encerrada bajo la llave, o sea:

$$\overbrace{\text{«K»} \; a\mu \; \text{«R»} \; b\mu \; \text{«H»}}$$

como relación binaria compuesta de «K», «R» y «H», y la llamamos «S»:

$$\overbrace{\text{«K»} \; a\mu \; \text{«R»} \; b\mu \; \text{«H»}} = \text{«S»}$$

tendremos, sustituyendo en [1]:

$$C\mu \; \text{«S»} \; d\mu$$

y

$$C\mu \; \text{«P»} \; d\mu$$

«S» y «P» son compatibles, pues se refieren a los mismos elementos, $C\mu$ y $d\mu$, por ende, satisfacen los teoremas 4.º y 5.º. Según esto, deducimos el siguiente

Teorema 7.º Si A y B son las cotas de una relación definida «R» y C y D las de otra relación definida «P», ambas son incompatibles, la relación «R» implica «P», y «K» y «H» son las relaciones determinantes de la implicada, la primera cota de «K» y la segunda de «H» estarán en las cotas correspondiente de la relación implicada «P».

Demostración:

Por una parte tendremos:

$$C\mu \text{ «K» } a\mu \ ; \ b\mu \text{ «H» } du \ ;$$

$$a\mu \text{ «R» } b\mu \ ; \ Cu \text{ «P» } d\mu \text{ y «R» } \longrightarrow \text{ «P»}$$

encadenando las «K», «R» y «H», obtendremos:

$$\overbrace{\text{«K» } a\mu \text{ «R» } bu \text{ «H»}} = \text{«S»} \quad \text{y} \quad C\mu \text{ «S» } d\mu \ ,$$

también será «S» $\longrightarrow$ «P», pues contiene a «R».

Como acabamos de ver, son compatibles, por ende, según el teorema 4.º, las cotas de «P» contendrán a la primera cota de «K» y a la segunda de «H», que es lo que pretendíamos demostrar.

VIII

COTAS RELATIVAS DE UNA CONDICION LOGICA

Anteriormente definimos el concepto de «cota» de una condición lógica, como el conjunto de todos los elementos que la satisfacen. Estas cotas las calificaremos de absolutas, pues fuera de ellas, por definición, no puede existir ningún elemento que pueda satisfacer la condición lógica dada.

Cotas relativas.—Dado un conjunto definido E y una condición lógica P, llamaremos «cota relativa de P en E» al conjunto de *todos los elementos de E* que la satisfacen.

Según esta definición, si A es la cota absoluta de una condición lógica P, la cota relativa en un conjunto E será la intersección de A y E:

$$\text{Cota en E de P} = A \cap E$$

Los teoremas 4.º, 5.º, 6.º y 7.º se pueden considerar restringidamente dentro de un conjunto definido E, cosa que podemos comprobar aplicando las demostraciones de dichos teoremas, considerando única y exclusivamente los elementos de E.

Por ejemplo:

1.º Si «R» implica «P» para los elementos de E, o sea dentro del conjunto E, las cotas relativas de «R» en E estarán contenidas en las cotas relativas de «P» en E, según el teorema 4.º

2.º Si «R», *en general*, implica «P»; pero sus cotas relativas en E son iguales, dentro del conjunto E, dichas relaciones serán equivalentes; pero no lo serán en general.

Todo esto lo puede comprobar el lector, repitiendo las demostraciones dadas, en general, para los teoremas 4.º, 5.º, 6.º y 7.º; pero limitándolas únicamente a los elementos de un conjunto dado E, por lo que no creemos necesario dar más detalles.

A partir de estos resultados nos encontramos ya en condiciones de efectuar el análisis de la lógica de predicados y cálculo proposicional de primer y segundo orden de conjuntos definidos y absolutamente definidos, tal como veremos en lo sucesivo.

IX

CONJUNTOS ABSOLUTAMENTE DEFINIDOS

Diremos que un conjunto es *absolutamente definido* cuando lo sean, a la vez, todos sus subconjuntos y, por ende, todos sus elementos; por consiguiente, un conjunto «absolutamente definido» E satisface las siguientes propiedades:

1. E es numerable.

2. E tiene una definición constituida por un conjunto de condiciones lógicas $(P_1, P_2, \ldots P\sigma)$, tales que para todo X sea:

$$\{ X \vdash (P_1, P_2 \ldots P\sigma) \} \longrightarrow (X \in E)$$

3. Cada subconjunto constituido por elementos de E, además de satisfacer las $(P_1, P_2 \ldots P\sigma)$, satisface con carácter exclusivo otras condiciones $(M_1, M_2 \ldots M_c)$ que, junto con las $(P_1, P_2 \ldots P\sigma)$ constituirán la definición de dicho subconjunto; por ende, será un subconjunto definido y tendrá por definición a la reunión de condiciones lógicas:

$$(P_1, P_2 \ldots P\sigma) \quad \cup \quad (M_1, M_2 \ldots M_c)$$

4. Cada elemento $e\mu$ de E es definido, o sea satisface unas condiciones lógicas con carácter exclusivo. Si llamamos $(N_1, N_2 \ldots N_\beta)$ a dichas condiciones lógicas, la definición $Ae\mu$ del elemento $e\mu$ será:

$$Ae\mu = (P_1, P_2 \ldots P\sigma) \quad \cup \quad (N_1, N_2 \ldots N_\beta)$$

Esto quiere decir que cada elemento de E se puede distinguir de cualquier otro, por satisfacer, con carácter exclusivo, un conjunto de propiedades, que constituyen su definición; por ende, forzosamente, y como hemos dicho anteriormente, el conjunto E será numerable.

Relaciones-Teoremas en un conjunto absolutamente definido.—En el capítulo III vimos como todo resultado lógico válido para todos los elementos de un conjunto E, tiene que ser consecuencia lógica de su axiomática A_E. Según esto, la axiomática A_E de E «implica» todas las demás consecuencias lógicas satisfechas por *todos* los elementos de E. Si recordamos el enunciado del teorema 4.º, las cotas de todo teorema o relación-teorema, implicado por A_E, deberán contener a las cotas de A_E; pero las cotas de A_E se reducen al conjunto E, ya que A_E, según hemos visto, es la definición de E; por ende, todo teorema o relación-teorema satisfecho por todos los elementos de E, tendrán como cotas a conjuntos que contienen E.

No ocurre así con teoremas satisfechos únicamente por subconjuntos de E, o sea con consecuencias lógicas de segundo orden, pues si E_1 es un subconjunto de E, y P_1 una condición lógica o teorema satisfecho únicamente por E_1, las cotas, tanto de A_E como de cualquier condición o teorema, consecuencia lógica de A_E, contendrán al subconjunto E_1 de E; por ende, P_1 «implicará», según los teoremas 4.º y 5.º, tanto a A_E como a cualquier condición o consecuencia lógica implicada por A_E. Según esto, vamos a investigar las clases y número de condiciones lógicas deducidas o implicadas, o sea de relaciones-teoremas, que son posibles dentro de un conjunto absolutamente definido.

Si Ae_μ es la definición del elemento e_μ de un conjunto absolutamente definido E, y Ae_υ la de otro elemento e_υ, según el teorema 2.º, la intersección $Ae_\mu \cap Ae_\upsilon$ definirá a un subconjunto $E_{\mu\upsilon}$ de E, que contiene a la reunión

$$e_\mu \cup e_\upsilon$$

o sea:

$$(e_\mu \cup e_\upsilon) \vdash (A_{e_\mu} \cap A_{e_\upsilon}) \qquad [1]$$

Luego, esta relación lógica será un teorema de Prop (E).

De forma análoga tendremos, aplicando sucesivamente el teorema segundo:

Si $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n$ son elementos de E y $A_{e_1}, A_{e_2} \ldots A_{e_n}$ son sus definiciones correspondientes:

$$(\bigcup_n e_n) \vdash (\bigcap_n A_{e_n}) \qquad [2]$$

será un teorema de Prop (E).

Cuando en $\bigcap\limits_n A_{e_n}$ se realice la intersección de las definiciones de todos los elementos de E, será

$$\bigcap_n A_{e_n} = (P_1, P_2 \ldots P\sigma) = A_E$$

entonces llegamos a la definición o axiomática satisfecha por todos los elementos de E.

Método inverso: Si $E_1^n, E_2^n \ldots E_\beta^n$ son subconjuntos de E, constituidos por *n* elementos, y $A_{E_1^n} \cdot A_{E_2^n} \ldots A_{E_\beta^n}$, sus definiciones respectivas, según el teorema 1.º, tendremos:

$$\left(E^n_\mu \cap E^n_\upsilon\right) \vdash \left(A_{E^n_\mu} \cup A_{E^n_\upsilon}\right)$$

Esta relación lógica será un teorema de Prop (E). Aplicando este procedimiento sucesivamente, tendremos la expresión general:

$$\left(\bigcap_\beta E^n_\beta\right) \vdash \left(\bigcup_\beta A_{E^n_\beta}\right)$$

Cuando las intersecciones $\bigcap\limits_\beta E^n_\beta$ se reduzcan a un solo elemento de E, $\bigcup\limits_\beta A_{E^n_\beta}$ será la definición de dicho elemento, o sea

$$\left(\bigcup_\beta E^n_\beta = e_\mu\right) \Longleftrightarrow \left(\bigcap A_{E^n_\beta} = A_{e_\mu}\right)$$

Por este segundo método obtendremos los mismos teoremas que por el primero, aunque de forma inversa.

Cuando dos condiciones lógicas o relaciones-teoremas de Prop (E) no sean la una consecuencia lógica de la otra, o lo que es lo mismo, cuando no se impliquen, diremos que son «independientes».

Teorema 8.º La expresión

$$\left(\bigcup_n e_n\right) \vdash \left(\bigcap_n A_{e_n}\right)$$

contiene a todos los teoremas o condiciones lógicas deducidas e *independientes* de Prop(E), o sea las cuales son consecuencia lógica de la axiomática satisfecha por E.

Demostración:

Las cotas de toda condición lógica implicada P satisfecha por todo elemento de E, según el teorema 4.º, deberán contener a las cotas de la condición o relación-teorema implicante; ahora bien, en la expresión

$$\bigcup_n e_n$$

están representados todos los subconjuntos de E, dando todos los valores posibles al índice n; por ende, cualquier condición lógica satisfecha por elementos de E, tendrá sus cotas en $\bigcup\limits_n e_n$, y por ende, será equivalente a alguno de los teoremas

$$\left(\bigcup_n e_n\right) \vdash \left(\bigcap_n A_{e_n}\right)$$

(1) NOTA: Téngase en cuenta que la definición de un elemento e_μ dE está constituida por la reunión de la axiomática ($P_1 \dots P_\sigma$) de E, más las condiciones lógicas (M_1 $M_2 \dots M_r$) satisfechas exclusivamente por dicho elemento.

(2) NOTA. Por $\bigcup\limits_n e_n$ expresamos $e_1 \cup e_2 \dots \cup e_n$, y por $\bigcap\limits_n e_n$. $e_n \cap e_2 \cap \dots \dots \cap e_n$.

Según esto, cualquier condición lógica, cuya cota tenga un subconjunto E_1 de E y que sea satisfecha por más de un elemento de E, estará implicada por las condiciones lógicas que definen el subconjunto E_1, ya que sus cotas lo contienen.

Ejemplo: Dos grupos del mismo orden n satisfacen la axiomática general de grupo; pero las condiciones lógicas que definen cada uno de sus elementos no son otra cosa que su tabla de multiplicar. Solo en ella, cada elemento tiene unas propiedades o comportamiento que lo distinguen de los demás; por consiguiente, la tabla de multiplicar de un grupo implicará cualquier consecuencia lógica satisfecha por todos los elementos del mismo o por cualquier subconjunto; consecuentemente, los grupos del mismo orden y que tienen la misma tabla de multiplicar, o sea, que son «isomorfos», satisfacen las mismas propiedades. Cosa que, por otra parte, es bien conocida en el estudio y análisis de los grupos isomorfos.

X

CONDICIONES LOGICAS DE N -VARIABLES

Los teoremas 1, 2 y 3 se refieren a condiciones lógicas de una variable proposicional, o sea de una cota. En el capítulo anterior hemos deducido algunos resultados lógicos, partiendo de dichos teoremas. No obstante vamos a formular las correspondientes generalizaciones de los mismos, para condiciones lógicas o relaciones definidas de n variables proposicionales:

Una relación definida «R^n» con n variables tendrá también n cotas, precisamente los n conjuntos que la satisfacen representando el papel de variables de dicha relación. A partir de estos conceptos deducimos los siguientes teoremas:

TEOREMA 9.—Si «R^n» es una condición lógica de n variables proposicionales y sus cotas correspondientes son los conjuntos A_1, A_2, ... A_n; y P^n es otra condición lógica, también de n variables, cuyas cotas son B_1, B_2 ... B_n, siempre que «R^n» y «P^n» sean compatibles, su reunión o composición «R^n» $\cup$ «P^n» definirá a las «intersecciones» de sus cotas correspondientes.

Demostración:

Por una parte, tendremos:

$$\{(A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_n) \vdash «R^n»\} \quad ; \quad \{(B_1 \wedge B_2 \ldots \wedge B_n) \vdash «P^n»\}$$

ahora bien, según la definición de cota, tendremos para todo $X_1, X_2 \ldots X_n$

$$\{(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \ldots) \vdash R^n\} \longleftrightarrow \{(X_1 \in A_1) \wedge (X_2 \in A_2) \ldots (X_n \in A_n)\}$$

luego, si hacemos

$$A_1 \cap B_1 = e_1 \, ; A_2 \cap B_2 = e_2 \ldots A_n \cap B_n = e_n$$

tendremos

$$e_1 \in A_1 \quad ; \quad e_2 \in A_2 \ldots . e_n \in A_n$$

luego,

$$\{(e_1 \wedge e_2 \ldots e_n) \vdash «R^n»\}$$

Por la misma razón, será

$$\{(e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_n) \vdash «P^n»\}$$

ya que los e_1, $e_2 \ldots e_n$ también pertenecen a los B_1, $B_2 \ldots B_n$ correspondientes; luego dichas intersecciones, e_1, $e_2 \ldots . e_n$, satisfacen a la vez «R^n» y «P^n», como además éstas son por hipótesis compatibles, se puede efectuar la reunión

$$\{(e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_n) \vdash («R^n» \cup «P^n»)\}$$

Teorema 10: Si «R^n» y «P^n» son condiciones lógicas con n variables y A_1, $A_2 \ldots A_n$ y B_1, $B_2 \ldots B_n$ sus cotas correspondientes, siempre que las «R^n» y las «P^n» contengan algo en común, o sea que su intersección no sea vacía, dicha intersección, «R^n» $\cap$ «P^n», definirá a n conjuntos C_1, C_2, $C_3 \ldots e_n$, que contendrán a las reuniones

$$(A_1 \cup B_1) \quad ; \quad (A_2 \cup B_2) \ldots (A_n \cup B_n).$$

Demostración:

Por una parte, tendremos:

$$\{(A_1 \wedge A_2 \ldots A_n) \vdash «R^n»\} \qquad [1]$$

por otra parte, será:

$$\{(B_1 \wedge B_2 \ldots \wedge B_n) \vdash «P^n»\} \qquad [2]$$

Si «R^n» está constituida por una serie de condiciones lógicas elementales

$$M_1, M_2 \ldots M\sigma$$

o sea:

$$«R^n» = (M_1 \cup M_2 \cup M_3 \ldots \cup M\sigma)$$

y «P^n» por las

$$N_1, N_2, \ldots N\mu$$

o sea:

$$«P^n» = (N_1 \cup N_2 \ldots \cup N\mu)$$

y dichas series no son disjuntas, será

$$(«R^n» \cap «P^n») = «H^n»$$

Las A_1, $A_2 \ldots A_n$ satisfacen «H^n» según la [1], pues «H^n» está contenida en «R^n»; por la misma razón, las B_1, $B_2 \ldots B_n$ también satisfacen «H^n», ya que ésta también pertenece a «P^n»; luego, las A_1 A_2 $A_3 \ldots$

... A_n y las B_1, B_2 ... B_n satisfacen, a la vez, a las condiciones «H^n»; por ende:

$$\{(A_1 \cup B_1) \wedge (A_2 \cup B_2) \ldots (A_n \cup B_n)\} \vdash «H^n»$$

o, lo que es lo mismo,

$$[(A_1 \cup B_1) \wedge (A_2 \cup B_2) \ldots \wedge (A_n \cup B_n)] \vdash («R^n» \cap «P^n»)$$

Si las cotas de («R^n» $\cap$ «P^n») son los conjuntos C_1, C_2 ... C_n, forzosamente será, según la definición de cota:

$$(A_1 \cup B_1) \subset C_1 \quad ; \quad (A_2 \cup B_2) \subset C_2 \ldots . (A_n \cup B_n) \subset C_n$$

que es lo que pretendíamos demostrar.

Limitémonos a condiciones lógicas que sean «relaciones de dos variables»:

Si «R_1», «R_2», «R_3» .... «R_n» son relaciones de esta clase, cuyas cotas, A_1 y B_1, A_2 y B_2, A_3 y B_3, A_4 y B_4 ..... A_n y B_n, son todas subconjuntos de un conjunto absolutamente definido E, y todas estas relaciones son compatibles, según el teorema 9, tendremos:

$$[(\bigcap_n A_n) \wedge (\bigcap_n B_n)] \vdash (\bigcup_n «R_n»)$$

Cuando las

$$\bigcap_n A_n$$

y las

$$\bigcap_n B_n$$

se reduzcan a un solo elemento, habremos obtenido la definición de los elementos de E por medio de relaciones binarias. Según esto, será:

$$(\bigcap_n A_n) «R_1 \cup R_2 \ldots \cup R_n» (\bigcap_n B_n)$$

o, en forma implícita,

$$(\bigcap_n A_n) «\bigcup_n R_n» (\bigcap_n B_n)$$

Método inverso:

Si «R_n» son las relaciones binarias acotadas que definen cada par de elementos de un conjunto absolutamente definido E, aplicando el teorema 10, obtendremos:

$$[(\bigcup_n A_n) \wedge (\bigcup_n B_n)] \vdash (\bigcap_n «R_n»)$$

o, lo que es lo mismo,

$$(\bigcup_n A_n) «\bigcap_n R_n» (\bigcup_n B_n)$$

cuando $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n = E$,

$\bigcap_n$ «R_n» será la definición de E.

X I

EN TORNO A LAS DEFINICIONES DE COTA

Una condición lógica o relación definida, de n variables proposicionales, tiene, efectivamente n cotas. Dicha relación define a dichas cotas; pero si A es una de estas cotas, siempre que exista un conjunto de condiciones lógicas (M_1 M_2 ... $M\sigma$) que tenga también como cota al conjunto A, podremos tomar a las (M_1, M_2 ... $M\sigma$) como definición del conjunto A.

Consideremos una relación binaria «R», cuyas cotas son A y B, y éstas admiten también como definiciones a los conjuntos de condiciones lógicas (M_1, M_2 ... $M\sigma$) para A y (N_1, N_2 ... $N\tau$) para B.

Pueden darse tres casos:

1.º El conjunto (M_1, M_2 ... $M\sigma$) contiene al C N_1, N_2, ... $N\tau$) =

$$= (N_1, N_2 \ldots N\tau) \in (M_1, M_2 \ldots M\sigma) \qquad [1]$$

En este caso, la existencia de las (M_1, M_2 ... $M\sigma$) implicará la de las (N_1, N_2 ... $N\tau$):

$$(M_1, M_2 \ldots M\sigma) \in (N_1, N_2 \ldots N\tau)$$

puesto que, siendo (N_1, N_2 ... $N\tau$) una parte de (M_1, M_2 ... $M\sigma$), al decir que existen las (M_1, M_2 ... $M\sigma$), implícitamente se entiende que también existen sus partes, y entre ellas (N_1, N_2 ... $N\sigma$).

Si recordamos el teorema 3, el conjunto B, definido por (N_1, N_2 ...) deberá contener al conjunto A, definido por las (M_1, M_2 ... $M\tau$), teniendo en cuenta que sus definiciones satisfacen la relación [1].

Efectivamente, de acuerdo con el teorema 4, debe ser así, pues si (M_1, M_2 ... $M\sigma$), como hemos visto, implica (N_1, N_2 ... $N\tau$), la cota B de ésta deberá contener a la cota A de la implicante.

$$A \in B$$

Cuando sea (M_1, M_2 ... $M\sigma$) = (N_1, N_2 ... $N\tau$) ambas serán equivalentes.

2.º Los conjuntos de condiciones lógicas (M_1, M_2 ... $M\sigma$) y (N_1, N_2 ... ... $N\tau$) «no son disjuntos»:

$$(M_1, M_2 \ldots M\sigma) \cap (N_1, N_2 \ldots N\tau) = E \neq \emptyset$$

En este caso los conjuntos A y B serán afines. Ambos se pueden considerar como subconjuntos del conjunto que define la intersección E.

3.º Los conjuntos (M_1, M_2 ... $M\sigma$) y (N_1, N_2 ... $N\tau$) son disjuntos:

$$(M_1, M_2 \ldots M\sigma) \cap (N_1, N_2 \ldots N\tau) = \emptyset$$

Conjuntos afines.—Si «R» es una relación compuesta y acotada que es satisfecha por dos subconjuntos, A_1 y A_2, de un conjunto A:

$$A_1 \text{ «R» } A_2$$

y «P» es una relación, también compuesta y definida, que es satisfecha por los subconjuntos B_1 y B_2 del conjunto B:

$$B_1 \text{ «P» } B_2$$

siempre que A y B sean afines, las «R» y «P» no serán disjuntas, o sea contienen un subconjunto «S» de condiciones lógicas en común, lo cual quiere decir que será:

$$\text{«R} \cap \text{P»} = (\text{«R»}) \cap (\text{«P»}) = \text{«S»}$$

y, recordando el teorema 10, tendremos:

$$(A_1 \cup B_1) \text{ «R} \cap \text{P» } (A_2 \cup B_2) \qquad [1]$$

Esto significa que, si las cotas de «R» están en A y las de «P» están en B, las cotas de («R ∩ P» estarán en (A ∪ B); por ende, «R ∩ P» es una relación que es satisfecha a la vez e indistintamente por elementos de A y de B.

Teorema 11.—Si A está en relación «R» con B, siempre es posible determinar dos relaciones, «R_1» y «R_2», y un conjunto C, afín con A y con B, a la vez, tales que:

$$A \text{ «}R_1\text{» } C \text{ «}R_2\text{» } B$$

Demostración:

Supongamos que (M_1, M_2 . . . $M\sigma$) es el conjunto de condiciones lógicas que define A, y (N_1, N_2 . . . $N\tau$) la definición de B, tomemos un subconjunto $\overline{M}$ de (M_1 . . .) y otro $\overline{N}$ de (N, . . .). Su reunión

$$(\overline{M} \cup \overline{N}) = K$$

definirá un conjunto C afín con A y con B, pues será

$$(M_1, M_2 \ldots) \cap K = \overline{M}$$

$$(N_1, N_2 \ldots) \cap K = \overline{N}$$

Entre los conjuntos A y C, por ser afines, es posible determinar relaciones «R_1» por intersección, de acuerdo con la fórmula [1]: por la misma razón, entre C y B también existirán relaciones «R_2», ya que también C y B son afines; luego tendremos:

$$A \text{ «}R_1\text{» } C$$

$$C \text{ «}R_2\text{» } B$$

Encadenando estas relaciones obtendremos la expresión:

$$A \text{ «}R_1\text{» } C \text{ «}R_2\text{» } B$$

Lema de interpolación.—Llamemos «$\overline{R}_1$» al conjunto de todas las relaciones que son satisfechas por A y C, de la forma descrita en el párrafo anterior; y «$\overline{R}_2$» al conjunto de relaciones satisfechas por C y B. Siempre que «$\overline{R}_1$» y «$\overline{R}_2$» no sean disjuntas, a cualquier relación «S», perteneciente a la intersección «$\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2$», entre A y B se le puede interpolar un conjunto C, afín con A y B.

Estos es fácil de demostrar: Supongamos que «S» es una de tales relaciones

A «S» B

como «S» pertenece a «$\overline{R}_1$», también será

A «S» C

como «S» también pertenece «$\overline{R}_2$» será, por la misma razón

C «S» B

encadenando estas dos relaciones obtendremos:

A «S» C «S» B

Por otra parte, esto implica que «S» sea transitiva en (A ∪ C ∪ B).

Las interpolaciones entre relaciones o símbolos funcionales juegan un papel muy importante dentro de los capítulos de la Lógica Matemática y Cálculo Proposicional. Por ejemplo, en G. Kreisel podemos encontrar el siguiente:

Lema de interpolación.—«*Si $A \vee B$ est un théorème de Prop.(p), il existe une formule C dont toutes les variables propositionnelles sont communes à A et B et telle que $A \vee C$ et $\neg C \vee B$ soient des théorèmes de Prop.(p).*

Par recurrence sur le nombre K de variables propositionnelles qui sont dans A sans être dans B. Si $K = O$ il suffit de poser $C = \neg A$; supposons le lemme demontré pour $K = n - 1$ et soit A une formule telle que $A \vee B$ soit un théorème et qui ait exactement n variables propositionnelles qui ne soient pas dans B. Soit P l'une de ces variables, soient A_1 et A_2 les formules obtenues en substituant $\top$ et $\perp$ a P dans A. $A_1 \vee B_2$ et $A_2 \vee B$ son des théorèmes, donc $(A_1 \wedge A_2) \vee B$ est un théorème anquel on peut appliquer l'hypothèse de recurrence. On obtient ainsi une formule C telle que $(A_1 \wedge A_2) \vee$ $\vee C$ et $(\neg C) \vee B$ soient des théorèmes. De la definition de A_1 et A_2 il résulte que $A \vee C$ est un théorème.

En remplaçant A par $\neg A$ on obtient l'enoncé suivant:

Si $A \rightarrow B$ est un théorème de Prop.(p) il existe une formule C dont les variables propositionnelles sont communes à A et B et telle que $A \rightarrow C$ et $C \rightarrow B$ soient deux théorèmes.»

Hasta aquí G. Kreisel.

Este lema se reduce al símbolo funcional $\vee$ y a la relación implicativa e indefinida $\rightarrow$; mientras que el que demostramos anteriormente es válido para cualquier relación definida y transitiva en (A ∪ C ∪ B).

Aplicando sucesivamente este lema y siempre que la relación a la cual se aplica lo permita, obtendremos las siguientes expresiones:

$$A \text{ «R» } B$$

$$A \text{ «R» } C_1 \text{ «R» } B$$

$$A \text{ «R» } C_2 \text{ «R» } C_1 \text{ «R» } B$$

. . . .

. . . .

$$A \text{ «R» } C_n \text{ «R» } C_{n-1} \ldots C_1 \text{ «R» } B$$

(Continuará)