OBSERVACIONES SOBRE EL RESIDUO INTEGRAL DE CAUCHY Y SU APLICACION A UN TEOREMA DE MITTAG - LEFFLER

Por

JUAN BKERVOR

1. Sea (Fig. 1) una función $f(z)$ uniforme y meromorfa, con un número finito de polos a_1, a_2, ... a_n.

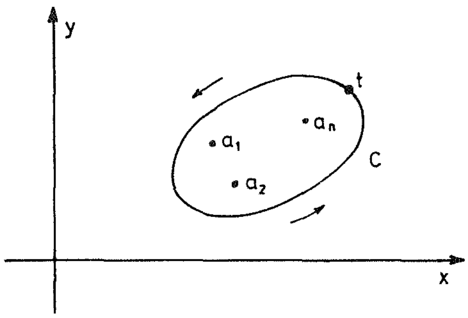

Fig. 1

Se tiene, llamando $\underline{t}$ a la variable compleja sobre el contorno,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{c}} \frac{f(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{c}} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = 0 \qquad [1]$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{c}} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = f(z) +$$

$$+ \Sigma \textit{ Resid. de } \frac{f(t)}{t-z} \textit{ para los polos de } \mathrm{f(t)} \textit{ contenidos en } C.$$

y

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{c}} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \mathrm{R}\infty$$

siendo R∞ el residuo para el punto del infinito de

$$\frac{f(t)}{t-z}.$$

Reemplazando estos valores en [1] se tiene:

$$f(z) = \Sigma \textit{ Resid. de } \frac{f(t)}{z-t} \textit{ para los polos de } f(t) - \mathrm{R}\infty \qquad [2]$$

Calculemos ahora R∞.

Haciendo el cambio de variable

$$t = \frac{1}{q}$$

se tiene, siendo ϵ un entorno del punto $q = 0$,

$$\mathrm{R}\infty = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{c}} \frac{f(t)\,dt}{t-z} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\epsilon}} \frac{f\left(\frac{1}{q}\right)dq}{\left(\frac{1}{q}-z\right)q^2} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\epsilon}} \frac{f\left(\frac{1}{q}\right)dq}{(1-qz)\,q}$$

Se tiene entonces, en virtud del teorema de los residuos,

$$\mathrm{R}\infty = \lim_{q=0} \frac{q\left[-f\left(\frac{1}{q}\right)\right]}{(1-qz)\,q} = \lim_{q=0} -f\left(\frac{1}{q}\right) =$$

$$= \lim_{z=\infty} -f(z) = -f(\infty). \qquad [3]$$

La fórmula [2] se escribe entonces:

$$\boxed{f(z) = \Sigma \; Resid. \; de \frac{f(t)}{z - t} \; para \; los \; polos \; de \; f(t) + f(\infty)} \qquad [4]$$

2. Esta fórmula nos permite descomponer una función meromorfa, con un número finito de polos en una suma de fracciones racionales. Veamos un ejemplo; sea la función,

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z + 7}{(z+1)(z-2)^2} \qquad [5]$$

que admite el polo simple $z = -1$ y el polo de segundo orden $z = 2$ y tal que

$$f(\infty) = \lim_{z = \infty} f(z) = 1.$$

Se tiene, aplicando la fórmula [4],

$$f(z) = 1 - \Sigma \; Resid. \; de \; \frac{t^3 - 3t + 7}{(t+1)(t-2)^2} \cdot \frac{1}{z - t},$$

$$f(z) = 1 + R_1 + R_2$$

endo R_1 y R_2 los residuos para los polos $t = -1$ y $t = 2$.

Se tiene:

$$R_1 = \lim_{t = -1} (t+1) \frac{t^3 - 3t + 7}{(t+1)(t-2)^2} \cdot \frac{1}{z - t} = \frac{1}{z + 1}$$

$$R_2 = \frac{d}{dt} \left[\frac{t^3 - 3t + 7}{(t+1)(z-t)} \right]_{t = 2} = \frac{2(z-2) + 3}{(z-2)^2} =$$

$$= \frac{2}{z - 2} + \frac{3}{(z-2)^2}$$

o sea

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-2} + \frac{3}{(z-2)^2}$$

3. Supongamos ahora el caso de una función uniforme con un número infinito de polos, con un punto de acumulación en el infinito, o sea con un punto singular esencial para $z = \infty$.

Tomemos como curva C una circunferencia C_n variable de radio r_n, con centro en el origen de coordenadas, que no pasa a través de ningún polo de $f(z)$ y tal que

$$\lim r_n = \infty \quad \text{para} \quad n \to \infty$$

Tomando límites podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = \lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{C_n} \textit{Resid. de } \dfrac{f(t)}{z-t} \text{ para los polos de } f(t) \text{ en } C_n + \\ \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\overrightarrow{C_n}} \dfrac{f(t)\,dt}{t-z} \end{array}\right\} \qquad [6]$$

la expresión

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{C_n}} \frac{f(t)\,dt}{t-z} \qquad [7]$$

es lo que Cauchy llama residuo integral de la función

$$\frac{f(t)}{t-z}$$

(CAUCHY, *Oeuvres*, serie II, tomo VII, págs. 324-344.)

Para calcular [7] haremos uso del siguiente teorema, también de Cauchy:

TEOREMA.—*Sea* $\varphi(t)$ *una función meromorfa y sean* $r_1, r_2, \ldots,$ *los radios de una serie de círculos con el origen como centro, ninguno de los cuales pasa a través de un polo de* $\varphi(t)$ *y tal que* $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = \infty$; *entonces, si mientras* n *tiende a infinito,* $t\,\varphi(t)$ *tiende uniformemente al límite* k, *para todos los puntos* $t = r_n e^{i\theta}$, *tales que* $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, *con la posible excepción de un número finito de puntos,* $\alpha - \epsilon \leqslant \theta \leqslant \alpha + \epsilon$, *y si* $|\,t\,\varphi(t)\,| \leqslant M$ *para todos los puntos sobre el arco, entonces*

$$\lim_{n=\infty} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varphi(t)\,dt = i(\theta_2 - \theta_1)\,k. \qquad [8]$$

En nuestro caso

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{t-z}$$

y

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi$$

Para que entonces la expresión [7] tenga un sentido es necesario que

$$\lim_{t\to\infty} t\,\frac{f(t)}{t-z} = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{r_n\to\infty} f(r_n e^{i\theta})$$

tienda uniformemente a un límite k finito sobre la circunferencia $|t| = r_n$.

Entonces de acuerdo con el teorema de Cauchy, si

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{r_n\to\infty} f(r_n e^{i\theta}) = \text{A para } \varphi_o + \epsilon < \theta < \varphi_o + \pi - \epsilon, \\ &\lim_{r_n\to\infty} f(r_n e^{i\theta}) = \text{B para } \varphi_o + \pi + \epsilon < \theta < \varphi_o + 2\,\pi - \epsilon, \end{aligned}\right\} \quad [9]$$

se tiene, en virtud de [8]:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\,\pi\,i} \int_{\varphi_o}^{\varphi_o+2\pi} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\,\pi\,i} \int_{\varphi_o}^{\varphi_o+\pi} \frac{f(t)\,dt}{t-z} +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\,\pi\,i} \int_{\varphi_o+\pi}^{\varphi_o+2\pi} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

$$= \frac{1}{2\,\pi\,i}\,.\,\pi\,i\,\text{A} + \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\pi\,i\,\text{B} = \frac{\text{A}+\text{B}}{2}$$

El residuo integral de Cauchy está dato entonces por la semisuma de los dos valores finitos, A y B, cuando éstos existen.

4. El estudio de los casos tratados por Cauchy, cotg z,

$$\frac{e^{az}}{e^z - 1}, \quad \frac{1}{e^z - 1}$$

etcétera, de tipo exponencial, me ha sugerido la posibilidad de investigar si existe una determinada clase de funciones meromorfas, a las cuales es posible aplicar la fórmula [6] para su desarrollo en una suma infinita convergente de fracciones racionales con un punto singular esencial $z = \infty$, tal que comprenda a los casos tratados por Cauchy, dé origen a nuevos desarrollos, y cuyo residuo integral,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\,\pi\,i} \int_{\overrightarrow{C_n}} \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

tenga un sentido, es decir, sea la semisuma de dos valores finitos.

Si los dos valores fueran finitos, valdría el desarrollo dado por la fórmula [6]; en caso contrario no sería posible tal desarrollo, pues se tendría una expresión divergente. Ensayemos, para esto, la función de tipo exponencial

$$f(e^z) = \frac{e^{\alpha z} \pm a}{e^{\beta z} \pm b} \qquad [10]$$

y estudiemos bajo qué condiciones dicha función satisface a las relaciones [9].

Supongamos α y β complejos y a y b reales o complejos. Se tiene entonces, sobre el círculo C_n de radio r_n,

$$f(ez) = f(e^{r_n e^{i\theta}}) = \frac{e^{(\mu + \eta i)\, r_n e^{i\theta}} \pm a}{e^{(\gamma + \delta i)\, r_n e^{i\theta}} \pm b}$$

o sea

$$f(e^{r_n e^{i\theta}}) = \frac{e^{(\mu r_n \cos\theta - \eta\, r_n \sin\theta)}\, e^{i(\eta\, r_n \cos\theta + \mu\, r_n \sin\theta)} \pm a}{e^{(\gamma r_n \cos\theta - \delta\, r_n \sin\theta)}\, e^{i(\delta\, r_n \cos\theta + \gamma\, r_n \sin\theta)} \pm b}.$$