EL METODO AXIOMATICO Y ALGEBRA DE RELACIONES Y CONDICIONES LOGICAS

Por

JUAN-ESTEBAN PALOMAR TARANCON

INTRODUCCION

Entre los diversos métodos que constituyen la arquitectura lógica del pensamiento matemático, sin duda alguna, el más importante es el llamado «Método Axiomático», que es tan antiguo como las ciencias matemáticas. Ha sido empleado desde la antiguedad por los matemático hindúes, por ejemplo, que nos legaron el famosísimo «Lilavati» hasta nuestros días; aunque su extracción de las diversas ramas de las matemáticas y su formulación abstracta es bastante reciente.

Sin duda alguna, los primeros intentos serios de construir una formulación abstracta y rigurosa de la estructura lógica del pensamiento matemático se deben a Leibnitz; sin embargo, hasta la aparición del álgebra de Boole y la Teoría de conjunto no se disponía de un lenguaje o vehículo adecuado para su ulterior desarrollo.

En la presente monografía nos vamos a ocupar de exponer, a muy grandes rasgos los fundamentos del citado Método Axiomático, precisamente bajo el punto de vista de las condiciones lógicas y relaciones definidas.

Por medio del Método Axiomático, dada una colectividad o conjunto cualquiera, se determinan ciertas propiedades o condiciones lógicas satisfechas por todos los elementos de la colectividad dada, y que constituyen su axiomática y, a partir de dichas condiciones lógicas, se deducen las consecuencias lógicas (teoremas), válidas para los elementos de dicha colectividad e implicadas por su axiomática.

Por ende, las condiciones lógicas que constituyen la axiomática de un conjunto, por su misma naturaleza, son de carácter restrictivo; esto quiere decir: que no pueden ser satisfechas por cualquier conjunto imaginable; por el contrario, definen al conjunto de elementos que la satisfacen; por ejemplo: Las cinco condiciones lógicas que constituyen la axiomática general de grupo, a la vez nos sirven para definir el concepto de grupo.

En los cimientos del Método Axiomático nos encontramos, pues, con condiciones lógicas. Las relaciones algebráicas también pueden considerarse como condiciones lógicas, siempre que sean definidas, o sea: que no puedan ser satisfechas por cualquier conjunto o serie de conjuntos; por consiguiente, el estudio del Método Axiomatico implica el estudio del álbegra que se desprende de las condiciones lógicas y de las relaciones definidas, además deberemos emplear el lenguaje propio del álgebra de Boole y de las matemáticas de conjuntos.

NOTA: La bibliografía consultada la iremos detallando «sobre la marcha», en notas al pie de la página o citando los autores que se han estudiado; no obstante, creemos oportuno indicar las siguientes obras:

G. KREISEL y J. L. KRIVINE.—«Eléments de Logique Mathematique et Teorie des Mòdels.—Monographies de la Societé Mathematique de France». París, 1967.

B. RUSSEL.—Principia Mathematica.

BIRKHOFF y MAC LANE.—Algebra Moderna.

I

LENGUAJES

Un lenguaje L está constituido por:

1. Un conjunto V_L, cuyos elementos se llaman variables y a los cuales se refieren las demás series de conjuntos que constituyen L.
2. Una serie de conjuntos $F_L{}^n$ ($n = 0, 1, 2 \ldots .$). Los elementos de $F_L{}^n$ se llaman «símbolos funcionales» de n variables. La reunión

$$F = \bigcup_n F_L{}^n$$

suele llamarse conjunto de símbolos funcionales. Llamaremos σ (F) al conjunto de «series de símbolos funcionales» formadas a partir de los elementos de F. Consideremos los subconjuntos M de σ (F) que tengan la siguiente propiedad:

Si $a_1, a_2 \ldots a_k$ son elementos de σ (F) y $f \in F_L{}^k$ es un símbolo funcional de K variables, $f(a_1, a_2 \ldots a_k)$ también pertenece a M. Los conjuntos así formados diremos que tienen la propiedad «S».

La intersección de dos subconjuntos que tengan la propiedad «S» conserva dicha propiedad, por ende, la intersección $\overline{F}$ de todos los conjuntos que tengan la propiedad «S» también tendrá dicha propiedad. El subconjunto $\overline{F}$ se llama «recinto» (1) funcional de la familia $F_L{}^n$, y a sus elementos «esquemas funcionales». Tales esquemas son de uso frecuente en las Matemáticas; por ejemplo: polinomios sobre un anillo cualquiera o fracciones racionales sobre un cuerpo cualquiera.

Se demuestra fácilmente que todos los elementos de $\overline{F}$ (esquemas funcionales) son de la forma $f(a_1, a_1 \ldots a_n)$, con $a_1, a_2 \ldots a_n \in \overline{F}$ y $f \in F_L{}^n$.

(1) Nota: «Recinto» es la traducción que damos a la palabra francesa «clôture».

3. Una serie de conjunto R_L^n ($n = 0, 1 \ldots$). Sus elementos se llaman «símbolos relacionales» con n variables. Sin duda alguna, los símbolos de esta clase de más frecuente uso son los de dos variables, precisamente esto les dedicaremos en lo sucesivo mayor atención.

Es obvio que los conjuntos V_L, F_L^n y R_L^n deben suponerse disjuntos dos a dos, ya que sus elementos son de naturaleza distinta.

Un lenguaje contiene además otros conjuntos llamados de términos, etc. Pero no vamos a detenermos en su descripción (2), pues son derivados de los primeros.

Relacionaremos únicamente los símbolos funcionales más importantes de los que haremos uso en la presente monografía:

Símbolos con 0 variables o símbolos de constantes:

$\top$ que se lee «verdadero».
$\perp$ que se lee «falso».

Símbolos de una variable:

$\neg$ que se lee «no».
$\bigvee$ que se lee «existe».

Símbolos de dos variables:

$\vee$ que se lee «o».
$\wedge$ que se lee «y».

También incluiremos, aún con más frecuencia, los símbolos de dos variables propios del lenguaje del Algebra Booleana:

$\cup$ que expresa la reunión de dos clases.
$\cap$ que expresa la intersección de dos clases.

Es también importante la operación de complementación de clases, que suele llamarse «operación prima», ya que se expresa tildando la letra que se utilice como símbolo de una clase.

No podemos eludir el uso de los símbolos relacionales propios de la Matemáticas de Conjuntos, a saber:

$\in$ que expresa la relación de pertinencia.
$\rightarrow$ que se lee «implica».

La doble relación implicativa, $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow A$, la expresaremos por el símbolo $\leftarrow\rightarrow$, que se lee «equivale». De forma análoga, por medio del símbolo $\notin$, expresaremos la relación de no-pertinencia.

En general, cuando deseemos representar una relación de dos variables, distinta a las antes descritas, lo haremos por medio de una letra mayúscula entre comillas preferentemente, como ya es costubre, la letra «R»; pero como necesitaremos un mayor repertorio de símbolos relacionales, cualquier letra la usaremos para expresar una relación; por ejemplo: «P», «S», «Γ», etc.

---

(2) Véase: G. Kreisel y J. L. Krivine: «Elements de Logique Mathematique».

II

ALGEBRA DE CLASES

Para el analisis del álgebra que se desprende de los símbolos relacionales o, mejor dicho, de las relaciones que expresan estos símbolos, partiremos del *álgebra de clases* (booleana). Por consiguiente, creemos oportuno recordar sus fundamentos y definición:

Un álgebra booleana B es un conjunto de elementos, con las siguientes propiedades:

1.º B posee dos operaciones binarias $\cup$ y $\cap$ (reunión e intersección), que satisfacen las siguientes propiedades:

a) Idempotente:

$$X \cap X = X \quad \text{y} \quad X \cup X = X$$

b) Conmutativa:

$$X \cup Y = Y \cup X \;; \quad \text{y} \quad X \cap Y = Y \cap X$$

c) Asociativa:

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z \quad \text{y} \quad X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$$

d) Distributiva:

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \text{ y}$$
$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

2.º B posee una relación denotada por $\leqslant$, la cual es reflexiva, antisimétrica y transitiva y satisface el principio de conformidad, o sea que las tres condiciones siguientes

$$X \leqslant Y \quad ; \quad X \cap Y = X \quad \text{y} \quad X \cup Y = X$$

son equivalentes, esto es cada una de ellas implica a las otras dos.

3.º B tiene dos cotas universales, que se expresan por los símbolos O y I, que satisfacen las siguientes leyes de reunión e intersección:

a) Son cotas universales, o sea que para todo X será:

$$O \leqslant X \leqslant I$$

b) Intersección:

$$O \cap X = O \quad \text{e} \quad I \cap X = X$$

c) Reunión:

$$O \cup X = X \quad \text{y} \quad X \cup I = I$$

4.º B posee la operación unitaria de complementar (operación prima o símbolo funcional de una variable), que satisface las siguientes leyes:

a) Complementación:

$$X \cap X' = O \quad y \quad X \cup X' = I$$

b) Dualidad:

$$(X \cap Y)' = X' \cup Y' \quad y \quad (X \cup Y)' = X' \cap Y'$$

c) Involución:

$$(X')' = X$$

El álgebra de clases, pues, posee un lenguaje propio constituido por los símbolos funcionales, variables y símbolos relacionales descritos:

Símbolos de una variable: El símbolo «prima» que expresa la complementación.

Símbolos de dos variables: El símbolo $\cup$ (reunión) y el $\cap$ (intersección).

Relaciones de dos variables: La que expresa el símbolo $\leqslant$, y que está emparentada con la relación de pertinencia $\in$.

En general, el álgebra de las proposiciones o enjuicios matemáticos enlazados por las conjunciones «*y*», «*o*» y «*no*» es un álgebra booleana, así como la de las relaciones «.... implica ....» y «.... equivale....».

En general, «en toda proposición o juicio matemático-lógico, donde se piensa el enlace entre una expresión A (variable proposicional) y otra expresión B, llamaremos a dicho enlace *relación algebráica* y al símbolo que lo representa *símbolo relacional de dos variables*».

Precisamente a estos enlaces o relaciones vamos a dedicar principalmente esta monografía. Si tenemenos en cuenta que a partir de la relación de igualdad (=) se construyen las ecuaciones y toda una metodología rica en resultados, es de esperar que el estudio de las relaciones en general, que es mucho más abstracto, puede rendir una importancia práctica considerable de forma más o menos inmediata.

Una de las ventajas que supone el manejo del álgebra de relaciones es que, de forma sencilla y lógica, se obtiene una formulación poco compleja para el manejo de la lógica de predicados de orden superior al primero (en el sentido de Bourbaki), o sea aquella que se desprende de la axiomática propia de los «subconjuntos» de un conjunto o realización, base de una arquitectura matemático-lógica; además de los resultados lógicos, o cálculo proposicional y de predicados, de primer orden, obtenidos exclusivamente de la axiomática satisfecha por todos los elementos del conjunto considerado.

Estos es importante, teniendo en cuenta que la lógica matemática, fuera de los resultados de primer orden, todavía no ha llegado muy lejos. Estas cuestiones pueden verse con destalle en Mostowski (FM), 44 (1957).

Nota: Se pueden encontrar más detalles sobre álgebra de clases e incluso sobre las diversas ramas del álgebra Moderna en la obra de Birfihoff y Mac Lane, titulada «A Survey of Modern Algebra», la cual está editada en España, traducida por R. Rodríguez, bajo el título de *Algebra Moderna*.

III

REALIZACIONES Y CONDICIONES LOGICAS

Realizaciones.—La realización de un lenguaje L, por definición, está constituida por:

1. Un conjunto $E \neq \varnothing$ (1) llamado «base» de la realización.
2. Para cada $n \geqslant O$ una aplicación de $F_L{}^n$ en el de funciones definidas sobre E^n tiene todos sus valores en E.
3. Para cada $n \geqslant O$ una aplicación de $R_L{}^n$ en B(E) (conjunto de las partes de E^n).

Para más detalles puede consultarse la ya citada monografía de G. Kreisel y J. L. Krivine.

Condiciones lógicas.—Llamaremos «condición lógica» a toda proposición o relación que sólo puede ser satisfecha por un determinado conjunto o series de conjuntos; pero no por cualquier conjunto o elemento imaginable.

Si P es una condición lógica y E es el conjunto de todos los elementos que la satisfacen, diremos que E es la *cota* de la condición lógica P.

De aquí que, si X satisface P, forzosamente pertenecerá a E:

$$(X \vdash P) \longleftrightarrow (X \in E) \qquad (2)$$

Según la definición que acabamos de dar, el conjunto ($\vdash$ E) de todos los elementos que no pertenecen a E, no puede ser vacío, pues de lo contrario P sería satisfecha por todo elemento imaginable, lo que está en contradicción con la definición que hemos dado de «condición lógica».

Conjuntos definidos.—Un conjunto C diremos que es definido, si existen un conjunto de condiciones lógicas $P = (P_1, P_2 \ldots P_n)$, tales que sólo puedan ser satisfechas por los elementos de dicho conjunto y, a la vez, todos los elementos del mismo la satisfacen.

Por consiguiente, para todo X tendremos:

$$(X \vdash P) \longleftrightarrow (X \in C)$$

Al conjunto de condiciones lógicas P lo llamaremos «definición de C». Estos significa que los elementos de C pueden ser reconocidos por sus propiedades, que los distinguen de cualquier otro elemento no perteneciente a C.

Conviene detallar algunos conceptos elementales sobre el Método Axiomático, en cuya arquitectura están ensamblados los resultados lógicos que obtendremos en lo sucesivo:

Una estructura S se expresa en matemáticas de conjuntos por su axiomática A_S, que satisface las siguientes condiciones:

a) A_S es puramente lógica.

---

(1) Nota: Por medio del símbolo $\varnothing$ expresamos un conjunto vacío.

(2) Nota: El símbolo relacional $\vdash$ debe leerse «satisface»; luego la expresión $(X \vdash P)$ se leera: X satisface a P.

b) S Satisface A_S, por ende existe una realización que satisface A_S. Todas las estructuras que satisfacen la misma axiomática se dice que son isomorfas.

c) Toda afirmación formulada en el lenguaje de S es consecuencia lógica de la axiomática As.

El conjunto de axiomas A_S, según esto, es única y exclusivamente satisfecha por S y todas las estructuras isomorfas; por ende, es una «condición lógica».

Si E es un conjunto con una axiomática propia A_E, o sea que todos los elementos de E satisfacen A_E, y a la vez A_E es la definición de E, lo cual significa que fuera de E no existe ningún otro conjunto que pueda satisfacer A_E ($\{X \vdash A_E\} \longleftrightarrow \{X \in E\}$), toda afirmación o proposición verdadera y demostrable para todo elemento o subconjunto de E, tendrá que ser consecuencia lógica de A_E.

Si K es una afirmación o proposición tal, habrá equivalencia entre: E satisface K y K es consecuencia lógica de A_E.

No creemos necesario insistir sobre estas cuestiones, ya que el lector puede encontrar más detalles en numerosos autores, por ejemplos, Burbaki, E; Kamke, Tarski, y en los ya citados Kreisel y Krivine, entre otros.

Notaciones.—En lo sucesivo, el conjunto de condiciones lógicas constituyen la definición de un conjunto E lo denotaremos siempre por A_E; y A_E, a la vez, deberá considerarse como conjunto de axiomas o condiciones lógicas satisfechas por E con carácter exclusivo, las cuales implican todas las consecuencias lógicas válidas para los elementos de E.

Conjuntos absolutamente definidos.—Cuando un conjunto sea definido y a la vez lo sean todos sus subconjuntos, lo calificaremos de «absolutamente» definido.

Conjuntos afines.—Si las definiciones o axiomática de dos conjuntos C y E contienen algunas condiciones lógicas en común, diremos que C y E son afines, por ende, será:

$$(A_C \cap A_E) \neq \varnothing \text{ (condición de afinidad)}$$

Partiendo de estos conceptos, distinguiremos las siguientes clases de condiciones lógicas:

Teoremas.—Si A_E es la definición o axiomática de un conjunto E, toda afirmación, proposición o relación verdadera y demostrable, para los elementos de E y que, a la vez, es consecuencia lógica de A_E, es un teorema de Prop(E) (1).

Relaciones.—Las relaciones entre elementos cualesquiera de un conjunto E, considerados como variables proposicionales, pueden ser de las siguientes clases:

1. *Relaciones definidas o acotadas.*—Si R_L^n es una relación de n variables, a_1, a_2, ... a_n, a los conjuntos A_1, A_2 ... A_n de todos los ele-

(1) Nota: Por Prop(E) expresamos el cálculo proposicional construido sobre elemento de E.

mentos que «satisfacen» R_L^n los llamaremos «cotas de R_L^n»(1). Cuando no todo elemento imaginable puede satisfacer R_L^n, los conjuntos A_1, $A_2 \ldots A_n$ serán definidos por condiciones lógicas, y en este caso diremos que la relación R_L^n es definida o acotada.

2. Cuando las cotas de una relación contienen a todo elemento imaginable, o sea:

$$\neg A_1 = \emptyset \, ; \, \neg A_2 = \emptyset \ldots \neg A_n = \emptyset$$

diremos que R_L^n es indefinida; por ejemplo: La relación de igualdad $=$ es indefinida, pues para todo X se tiene $X = X$; luego es susceptible de ser satisfecha por todo elemento imaginable.

3. *Relación-Axioma.*—Una relación definida es también una condición lógica, ya que por definición no puede ser satisfecha por todo elemento dado. Ahora bien, cuando una relación definida, R_L^n, pertenezca el conjunto de condiciones lógicas A_E, que definen un conjunto E, dicha relación en E es una axioma y consecuentemente la calificaremos de relación-axioma.

4. *Relación-Teorema.*—Por el contrario, toda relación R_L^n en E, que sea «consecuencia lógica» de la axiomática A_E de E, será un teorema de Prop(E), y por ende la calificaremos de relación-teorema.

En general, toda condición lógica entre elementos de un conjunto cualquiera E, o es un axioma de A_E o un teorema consecuencia de A_E.

En todo teorema hay una tesis o enunciado y una hipótesis o axiomática, de la cual es consecuencia dicha tesis. Cuando la tesis de un teorema venga dada por elementos de un lenguaje L o varios lenguajes $L_1 \cup L_2 \ldots L\sigma$, y los símbolos de estos lenguajes operen sobre elementos de un conjunto E , o lo que es lo mismo, todas las variables proposicionales que intervienen en dicha tesis, están en E, y hay precisamente n de estas variables, dicho teorema puede considerarse como relación de n variables en E.

Finalmente consideremos otras equivalencias que se desprenden de las relaciones implicativas entre la axiomática de un conjunto y su Prop.

Hay equivalencia entre las proposiciones: «A, es condición necesaria de B» y «B implica A», puesto que si B no puede ser verdadera sin la existencia de A, la veracidad de B implicará la existencia de A. También son equivalentes las proposiciones: «A, es condición suficiente de B» y «A implica B». Esto todavía tiene una evidencia más inmediata. Finalmente, son equivalentes las proposiciones: «A, es condición necesaria y suficiente de B» y «A equivale a B», puesto que, según lo anterior, *A implicará B* y *B implicará A.*

Después de estas aclaraciones, continuemos el estudio de las condiciones lógicas:

Teorema 1: Si A_C y A_E son las definiciones de dos conjuntos, C y E, la reunión $A_X = (A_C \cup A_E)$ definirá a la intersección de ambos conjuntos:

(1) Nota: Las cotas deben considerarse como *familias de conjuntos* que satisfacen R_L^n

Demostración:

Por hipótesis tendremos

$$(C \vdash A_C) \quad y \quad (E \vdash A_E)$$

Si ambos conjuntos tienen M elementos comunes

$$(C \cap E) = M$$

como $M \in C$ también será válida la relación $(M \vdash A_C)$ y como $M \in E$, por la misma razón tendremos $(M \vdash A_E)$; por consiguiente, M satisfade A_C y A_E a la vez, por ende:

$$[M \vdash (A_C \cup A_E)]$$

o lo que es lo mismo

$$(M \vdash A_X)$$

que es lo que pretendíamos demostrar.

Teorema 2: Si las definiciones A_C y A_E de dos conjuntos contienen un subconjunto común a las dos $A_X = (A_C \cap A_E)$, dicho subconjunto definirá a un conjunto X que contendrá a la reunión de C y E.

Demostración:

Como

$$A_X \subset A_C$$

tendremos

$$(C \vdash A_X)$$

como también

$$(A_X \subset A_E)$$

tendremos

$$(E \vdash A_X)$$

por consiguiente, las A_X son satisfechas, a la vez, por C y por E:

$$[(C \cup E) \vdash A_X]$$

o lo que es lo mismo

$$[(C \cup E) \vdash (A_X \cap A_E)]$$

Luego si A_X es la definición de X, tendremos

$$(C \cup E) \subset X$$

Teorema 3: Si la definición A_C de un conjunto C contiene a la definición A_E de otro conjunto E, el conjunto E contendrá al C, o lo que es lo mismo, C es un subconjunto de E.

Demostración:

Por hipótesis será:

$$(C \vdash A_C) \quad ; \quad (E \vdash A_E) \quad y \quad (A_X \subset A_C)$$

Como el conjunto de condiciones lógicas A_E están implícitamente en A_C, el conjunto C también satisface las A_E:

$$(C \vdash A_E)$$

por consiguiente, $C \subset E$. Si llamamos A_M a las condiciones lógicas que están en A_C sin estar en A_E, tendremos:

$$A_C = (A_E \cup A_M)$$

por ende, C será un subconjunto de E, que además de satisfacer las A_E satisface otras condiciones A_M.

IV

CLASES DE RELACIONES

Las relaciones pueden satisfacer las siguientes leyes:

1. Reflexiva: a «R» a.

2. Simétrica: Si a «R» b también será b «R» a.

3. Transitiva: Si a «R» b y b «R» c, será a «R» c.

Estas leyes se refieren a relaciones en sí mismas, independientemente de la naturaleza de sus miembros o variables proposicionales, a las cuales se aplica la relación considerada. No son precisamente estas propiedades de las relaciones las que nos interesan, sino, por el contrario, aquellas relacionadas con los conjuntos o clases que pueden ser miembros de una relación. De esta forma las relaciones las clasificaremos en:

1. Biunívocas: Son aquellas que para todo elemento A, tomado como primer miembro, hacen corresponder única y exclusivamente, un solo elemento B en el segundo miembro, y viceversa.

2. Multivocas: Son aquellas que admiten como miembros a colectividades, ya sean clases o conjuntos cualesquiera.

Según esto, si «R» es una relación multivoca:

$$a \text{ «R» } b$$

tanto a como b serán clases de n elementos (eventualmente $n = 1$).

Si $a_1, a_2 \ldots a_n$ es una clase que está en relación biunívoca con otra $b_1, b_2 \ldots b_n$, o sea:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \text{ «R» } b_1 \\ a_2 \text{ «R» } b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n \text{ «R» } b_n \end{array}\right.$$

también podemos representar en forma implícita este sistema de relaciones, de la siguiente manera:

$$a_1, a_2, \ldots a_n \text{ «R» } b_1, b_2 \ldots b_n$$

o más implícitamente:

$$A \text{ «R» } B$$

haciendo A $= (a_1, a_2 \ldots a_n)$ y B $= (b_1, b_2 \ldots b_n)$. Luego en las notaciones sucesivas, una relación, aún siendo *biunívoca*, deberemos interpretar que sus miembros A y B son colectividades cardinalmente iguales.

Partiendo de estos conceptos, clasificaremos las relaciones, según las siguientes propiedades, en:

I+A+) Relaciones incondicionalmente prolongables: Dada una relación «R» entre dos clases, a y b:

$$a \text{ «R» } b$$

diremos que esta relación es prolongable incondicionamente, cuando existan series de clases «cualesquiera» C_n y e_n, tales que, entre las reuniones $a \cup c_n$ y $b \cup e_n$, también exista la relación «R», o sea:

$$(a \cup c_n) \text{ «R» } (b \cup e_n)$$

Esta propiedad la denotaremos por medio de los símbolos I+A+.

I−A+) Relaciones condicionalmente prolongables: Cuando las series de clases C_n y e_n que amplían el campo de existencia de una relación *no pueden ser cualesquiera*, si no series bien determinadas, diremos que la relación es prolongable, pero «condicionalmente».

A−) Relaciones no-prolongables: Cuando los dos miembros de una relación no puedan ser ampliados en absoluto, por reunión de otras clases, diremos que la relación «R» «no es prolongable».

Según estas definiciones, las propiedades I+A+ y I−A+ son contrarias a la A−, y además incompatibles, o sea:

$$\neg A+ \rightarrow A- \quad \text{y} \quad \neg A- \rightarrow A+$$

Si una relación «R» no satisface la propiedad I+A+ ni la I−A+, forzosamente deberá tener la propiedad A−, pues no puede concebirse un cuarto caso, por ende existen las siguientes relaciones lógicas:

$$\{(\neg I+A+) \wedge (\neg I-A+)\} \rightarrow A-$$
y
$$(\neg A-) \rightarrow \{I+A+ \vee I-A+\} \qquad [1]$$

I+B+) Relaciones incondicionalmente reducibles: Dada una relación «R» entre las clases a y b, diremos que es incondicionalmente reducible cuando dicha relación exista también entre sub-clases cualesquiera de a y de b, o sea que si $d \leqslant a$ y $f \leqslant b$ también será d «R» f.

I−B+) Relaciones condicionalmente reducibles: Son aquellas relaciones reducibles únicamente a determinadas subclases de sus miembros, pero no a subclases cualesquiera.

B−) Relaciones irreducibles: Cuando una relación a «R» b no exista entre ninguna subclase de a ni b, diremos que es irreducible.

Por razones análogas a las expuestas en el caso de las relaciones prolongables y no-prolongables, tendremos las siguientes relaciones lógicas:

$$\{(\neg I+B+) \wedge (\neg I-B+)\} \rightarrow B-$$

$$(\neg B-) \rightarrow \{I+B+ \vee I-B+\}$$

DI+A+) Relaciones incondicionalmente prolongables a la derecha: Son aquellas en las que solamente es susceptible de prolongar sus miembros de la derecha, por ejemplo:

Si

$$a \text{ «R» } b$$

también

$$a \text{ «R» } (b \vee C)$$

SI+ A+) Relaciones incondicionalmente prolongables a la izquierda: Son aquellas en las que solamente es susceptible de prolongar el miembro de la izquierda. Con estas dos nuevas subclases de relaciones prolongables las relaciones lógicas (1) se convertirán en:

$$\{(\neg\ I{+}A{+}) \wedge (\neg\ I{-}A{+}) \wedge (\neg\ DI{+}A{+}) \wedge (\neg\ DI{-}A_{+}) \wedge$$
$$\wedge (\neg\ SI{+}A{+}) \wedge (\neg\ SI{-}A){+}\} \to A{-}, \text{ etc.}$$

De forma análoga podemos definir las siguientes propiedades:

1. Relaciones condicionalmente prolongables a la derecha:

DI—A+

2. Relaciones condicionalmente prolongables a la izquierda:

SI—A+

3. Relaciones incondicionalmente reducibles a la derecha:

DI+B+

4. Relaciones incondiconalmente reducibles a la izquierda:

SI+B+

Y así sucesivamente las que expresan los caracteres:

(DI—B+) , (SI—B+) , (I+A+, I—B+) , (DI+A+ , SI+B+), etc.

Todas estas relaciones pertenecen a la clase de las «directas», veámoslas.

H) Relaciones indirectas: Son aquellas que presentan el carácter prolongable a la derecha y reducible a la izquierda, o viceversa; *por reunión e intersección,* respectivamente; por ejemplo.

HDI+) Relaciones indirectas prolongables a la derecha incondicionalmente: Sea, por ejemplo, a «R» b y e «R» C, tendremos:

$$(a \cap e) \text{ «R» } (b \cup C)$$

HSI+) Relaciones indirectas prolongables a la izquierda 'incondicionalmente:

$$(a \cup e) \text{ «R» } (b \cap C)$$

K) Relaciones constantes: Cuando una relación no es en ninguno de sus miembros ni prolongable ni reducible diremos que es constante.

Según esto, tendremos las siguientes relaciones lógicas:

$$\{(\neg A+) \wedge (\neg B+) \wedge (\neg H)\} \rightarrow K$$

$$(\neg K) \rightarrow \{A+ \vee B+ \vee H\}$$

Dada una relación binaria «R» y tomando a_μ como primer miembro, «R» hará corresponder otro subconjunto b_μ en el segundo *miembro:*

$$a_\mu \text{ «R» } b_\mu$$

por consiguiente, cuando dos elementos o subconjuntos a_μ y b_μ estén en relación «R», también diremos «que se corresponden según «R».

Si existe otra relación «P» tal que tomando au como primer miembro también le corresponden en el segundo miembro b_μ

$$a_\mu \text{ «P» } b_\mu$$

diremos que las relaciones «R» y «P» «son compatibles para los subconjuntos a_μ y b_μ.

Como ya sabemos, los conjuntos A y B, constituidos por todos los elementos que satisfacen una relación «R», son sus cotas. Si A y B son las cotas de una relación «R» y C y D las de otra relación «P», para que dichas relaciones sean compatibles es condición necesaria que sus cotas respectivas no sean disjuntas, o sea:

$$A \cap C \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B \cap D \neq \emptyset$$

(Condición de compatibilidad)

Si hacemos $A \cap C = e$ y $B \cap D = f$ dentro de estas intersecciones serán compatibles las relaciones citadas, siempre que a cada elemento de e le corresponda, según «R» y según «P», un mismo elemento de f. También puede darse el caso de que ambas relaciones sólo sean compatibles dentro de dos subconjuntos $\bar{e}$ y $\bar{f}$ de e y f:

$$\bar{e} \in e \qquad \bar{f} \in f \quad (1)$$

Composición de relaciones.—Cuando dos relaciones «R» y «P» sean compatibles podemos representarlas implícitamente, reuniéndolas, por ejemplo:

Supongamos que «R» es la relación que expresa el siguiente juicio o proposición

.... «es menor que» ....

(1) Nota: A, B, C, etc., se consideran familias de conjuntos o conjuntos de conjuntos, por este motivo, se utiliza el símbolo $\in$ en vez del $\subset$.

y «P» la que expresa la proposición

..... «es divisor de» .....

las podemos reunir construyendo una nueva relación compuesta, que expresará:

.... «es menor y es divisor de» ....

que simbólicamente escribiremos así:

«R $\wedge$ P»

o también

«R $\cup$ P»

Lógicamente, para que sea posible efectuar la composición de varias relaciones éstas deberán ser compatibles, pues deben referirse a unos mismos elementos.

RELACIONES IMPLICADAS

Las relaciones definidas, como son condiciones lógicas, pueden ser implicadas por otras. Una relación «implicada», referida a elementos de un conjunto E será un teorema o consecuencia lógica de la axiomática A_E de E. Para las relaciones compatibles vamos a demostrar los siguientes teoremas:

Teorema 4.º Si entre elementos de un conjunto E la existencia de una relación «R» «implica» la de otra relación «P» y ambas son compatibles, las cotas A y B de la relación implicante «R» estarán contenidas en las cotas C y D correspondientes, de la relación implicada «P».

El enunciado de este teorema lo podemos expresar en lenguaje simbólico de la siguiente manera:

Hipótesis:

Cotas de «R»: A y B.
Cotas de «P»: C y D.

Condición:

«R» y «P» deben ser compatibles, o sea que determinan las mismas correspondencias entre los elementos comunes de sus cotas y «R» $\rightarrow$ «P».

Tesis:

$$A \in C \quad y \quad B \in D$$

Demostración:

Si el teorema fuera falso, habría, por lo menos, un subconjunto e de A que no estaría en C:

$$e \in A \quad y \quad e \notin C$$

Por la misma razón habría un subconjunto f de B que no estaría en D:

$$f \in B \quad y \quad f \notin D$$

Como según estas relaciones de pertinencia e pertenece a la cota A de la relación «R» y f a la cota B, recordando la definición de cota, ambos subconjuntos deberán satisfacer «R», o sea:

$$\{(e \wedge f) \vdash «R»\} \longleftrightarrow \{(e \in A) \wedge (f \in B)\}$$

recordando la relación lógica dada en el capítulo III; luego, será:

$$e «R» f$$

por la misma razón, como e y f hemos supuesto que no pertenecen a las cotas C y D de «P», no pueden satisfacer a esta última relación; por consiguiente, dentro de los subconjuntos e y f la existencia de la relación «R» no implicaría la de la relación «P», lo que está en franca contradicción con la hipótesis establecida; por ende, el teorema que nos ocupa no puede ser falso.

Corolario: Si dos relaciones compatibles y definidas «R» y «P» son equivalentes, o sea

$$«R» \longleftrightarrow «P»$$

sus cotas serán iguales:

Esto se desprende inmediatamente del teorema que acabamos de demostrar, puesto que en el caso de ser equivalentes, o sea que «R» $\rightarrow$ «P» y también «P» $\rightarrow$ «R», tendríamos:

$$A \subset C \quad ; \quad C \subset A \quad ; \quad B \subset D \quad y \quad D \subset B$$

o bien, en el lenguaje del álgebra booleana:

$$A \leqslant C \quad ; \quad C \leqslant A \quad ; \quad B \leqslant D \quad y \quad D \leqslant B$$

lo cual significa que

$$A = C \quad y \quad B = D$$

Ejemplo: Supongamos que la relación «R» es la que expresa

. . . . «es divisor de» . . . .

En el primer miembro tendremos como cotas al conjunto de todos los números naturales; y en el segundo miembro, al conjunto de todos los números naturales no-primos.

Si «P» es la relación que expresa

. . . . . «es menor que» . . . . .

efectivamente, «R» implicará «P», o sea: El que un número sea divisor de otro implica que, a la vez, será menor.

Las cotas de «P» serán, en ambos miembros, el conjunto de todos los números, pues dicha relación admite como miembro a cualquier número dado. Efectivamente, las cotas de la relación implicada «P» contienen a las de la relación implicante «R», de acuerdo con el teorema que acabamos de demostrar.

Teorema 5.º Si las cotas C y D de una relación «P» contienen a las cotas A y B de otra relación «R», esta relación implicará a la primera, siempre que ambas sean compatibles.

El enunciado de este teorema, en lenguaje simbólico, será:

Hipotesis:

Cotas de «R»: A y B.
Cotas de «P»: C y D.
Condiciones: $\begin{cases} A \in C \quad \text{y} \quad B \in D \\ \text{Las relaciones «R» y «P» son compatibles.} \end{cases}$

Tésis:

$$«R» \rightarrow «P»$$

Demostración:

Si el teorema fuera falso, habría dos subconjuntos e y f de A y B' respectivamente, los cuales estarían en relación «R» sin estar en relación «P», lo cual quiere decir que e estaría en A sin estar en C, y f estaría en B sin estar en D; por ende, sería:

$$e \in A \in C \quad \text{y} \quad e \notin C \quad ; \quad f \in B \in D \quad \text{y} \quad f \in D$$

Esto es absurdo, ya que la relación de pertinencia $\in$ es transitiva; por consiguiente, el teorema que nos ocupa no puede ser falso.

Corolario.—De forma análoga al teorema anterior, obtenemos el siguiente resultado: Cuando dos relaciones son compatibles y sus cotas son iguales, forzosamente tendrán que ser equivivalentes.

Estos dos importantísimos teoremas pueden ampliarse a relaciones con más de dos variables proposicionales, ampliando la definición de cota a relaciones de n variables. También se puede hacer extensivo cada uno de estos dos teoremas, a condiciones lógicas cualesquiera y la demostración la obtendremos de forma análoga a la dada para relaciones binarias, por lo que prescindimos de dar más detalles.