BASES DE UN REGIMEN DE CAPITALIZACION EN EL QUE LOS INTERESES ACUMULADOS SE INCORPORAN AL TERMINO DEL PLAZO CONVENIDO [1]

Por

JOSE ANTONIO ESTRUGO Y ESTRUGO

I

GENERALIDADES

De entre las infinitas funciones φ que teóricamente pueden satisfacer los requisitos de una ley de capitalización, la práctica ha sancionado dos, que corresponden a los regímenes de capitalización simple y compuesta,

$$\varphi(n) = \varphi(o)\,(1 + ni) \quad \text{y} \quad \varphi(n) = \varphi(o)\,(1 + i)^n \qquad [1] \text{ y } [2]$$

respectivamente, cuyas expresiones recogen el valor de la función capital utilizando el carácter discontinuo que las mismas presentan.

Consecuencia del postulado de la productividad, la función φ debe ser monótona no decreciente.

Es interesante en todo régimen de capitalización definir el tanto instantáneo de interés, o velocidad de capitalización, supuesto ahora a la función φ continua y derivable. Mediante un razonamiento clásico y general, se llega a la expresión

$$\varphi(n) = \varphi(o)e^{\int_o^n \varphi(t)dt} \qquad [3]$$

en donde $\rho(t)$ designa dicho tanto instantáneo. En este caso, el primer miembro representará la fórmula utilizada en la práctica y la investigación de ese tanto instantáneo conduce a resolver una ecuación integral.

---

(1) El presente trabajo constituye el desarrollo matemático de un problema original propuesto por el Ayudante de nuestra Cátedra, don Luis de Pereda Sáez.

Así, para obtener el tanto instantáneo correspondiente al régimen de capitalización simple, igualaremos los segundos miembros de [1] y [3] es decir,

$$\varphi(o)\,(1 + ni) = \varphi(o)e^{\int_o^n \rho(t)dt}$$

simplificando y tomando logaritmos neperianos:

$$\log e(1 + ni) = \int_o^n \rho(t)dt$$

y, por último, derivando

$$i/1 + ni = \rho(t) \qquad [5]$$

que expresa dicho valor.

Si hubiéramos igualado los segundos miembros de [2] y [3]

$$\varphi(o)\,(1 + i)^n = \varphi(o)e^{\int_o^n e(t)\,dt} \qquad [6]$$

y realizado idénticas operaciones, se hubiera obtenido

$$\rho(t) = \log e\,(1 + i) = \delta$$

que expresa el tanto instantáneo de interés del régimen de capitalización compuesta.

Recíprocamente podemos investigar, fijado que sea el arbitrio el tanto instantáneo de interés, cuál sería la fórmula a aplicar en la práctica, lo que, de acuerdo con la igualdad establecida en [3], nos llevaría a una simple integración.

Por ejemplo, si señalamos como tanto instantáneo de interés

$$\rho(t) = i/1 + ti.$$

se tendría

$$\varphi(n) = \varphi(o)e^{\int_o^n \frac{i}{1+ti}dt} = \varphi(o)e^{[\log_e(1 + ti)]_o^n} =$$

$$= \varphi(o)e^{\log_e(1 + ni)} = \varphi(o)\,(1 + ni)$$

que expresa la fórmula del valor final a interés simple y si hacemos

$$\rho(t) = \log e\,(1 + i) = \delta,$$

entonces

$$\varphi(n) = \varphi(o)e^{\int_o^n \delta\, dt} = \varphi(o)e^{[\delta\, t]_o^n} = \varphi(o)e^{n\delta} = \varphi(o)\,(1 + i)^n$$

reproduciéndonos el régimen de capitalización compuesta.

Un régimen de capitalización se dice escindible, si en un momento cualquiera $t\,(o < t < n)$, del proceso de capitalización, el capital constituido en dicho instante sometido a idéntico régimen por el tiempo que falta, reproduce al término n el mismo montante o capital final previsto.

Esta definición nos lleva a investigar la función que satisfaga la condición

$$g(x)\; g(y) = g(x + y) \qquad [7]$$

que, como sabemos, es la exponencial.

El régimen de capitalización simple no la cumple, puesto que para todo $t\ (o < t < n)$

$$\varphi(o)\,(1 + ti)\,(1 + (n - t)\,i) \neq \varphi(o)\,(1 + ni) \qquad [8]$$

en cambio, el régimen de capitalización compuesta, al verificarse que

$$\varphi(o)\,(1 + i)^t\,(1 + i)^{n-t} = \varphi(o)\,(1 + i)^n \qquad [9]$$

es escindible.

II

DEFINICION DEL NUEVO REGIMEN DE CAPITALIZACION

Dado un capital $\varphi(o)$ sometido a productividad durante n años, al tanto por uno, i, de interés anual, una vez producido $\varphi(o)i$, estos intereses se retiran, efectuando de inmediato otra inversión de esta cantidad al tanto r por uno anual.

De esta forma, el capital $\rho(o)$ permanece constante durante todo el tiempo n de duración de la operación a cuyo término los intereses acumulados se le unen.

La gráfica sería en este caso

	0	1	2	3	$n-1$	n	Valores acumulados
$\varphi(o)$						$\varphi(o)$	$\varphi(o)$
	φ	$\varphi(o)i$	$\varphi(o)i$	$\varphi(o)i$	$\varphi(o)i$	$\varphi(o)i$	
		$\varphi(o)i$	$\varphi(o)i(1+r)$	$\varphi(o)i(1+r)^2$			$\varphi(o)i(1+r)^{n-1}$
			$\varphi(o)i$	$\varphi(o)i(1+r)$			$\varphi(o)i(1+r)^{n-2}$
				$\varphi(o)i$			$\varphi(o)i(1+r)^{n-3}$
					$\varphi(o)i$	$\varphi(o)i(1+r)$	$\varphi(o)i(1+r)$
						$\varphi(o)i$	$\varphi(o)i$

Por tanto, el capital e intereses producidos durante los n años, será

$$\varphi(n)_{i,r} = \varphi(o) + \varphi(o)i\,(1+r)^{n-1} + \varphi(o)i\,(1+r)^{n-2} + \ldots. + \varphi(o)i(1+r) + \varphi(o)i$$

$$= \varphi(o)\left(1 + i\,\frac{(1+r)^n - l}{r}\right) = \; = \varphi(o)\,(1 + i\,S_{\overline{n}|r}) \qquad [10]$$

que nos expresa el valor del montante o capital final en este régimen de capitalización.

I I I

CASOS PARTICULARES

La fórmula [10] comprende, como caso particular, las del régimen de capitalización simple y compuesta. En efecto, debiendo ser en régimen de capitalización simple el capital productor constante, los intereses no son sometidos a nueva productividad; por tanto, $r = 0$, y según [10]

$$\lim_{r \to 0} \varphi(n)i{,}r = \lim_{r \to o} \varphi(o)\left(1 + i\,\frac{(1+r)^n - l}{r}\right) =$$

$$= \varphi(o)\left(1 + \lim_{r \to o} \frac{(1+r)^n - l}{r}\right) = \varphi(o)\,(l + ni)$$

Si hacemos ahora $r = i$, coincide el proceso dado con la capitalización compuesta, ya que

$$\varphi(n)_{i,i} = \varphi(o)\left(1 + i\,\frac{(1+i)^n - l}{r}\right) = \varphi(o)\,(1 + i)^n$$

observando que la característica fundamental de separación con este régimen es la existencia de dos tipos de interés. A i le podríamos denominar interés capital y a r interés inversor.

I V

CALCULO DEL TANTO INSTANTANEO DE INTERES

De acuerdo con lo indicado en el apartado I, la ecuación integral a resolver, de acuerdo con [3] y lo establecido en [10], sería

$$\varphi(o)\left(l + i\,\frac{(1+r)^n - l}{r}\right) = \varphi(o)e^{\int_o^n \rho(t)dt}$$

simplificando y tomando logaritmos neperianos

$$\log e \left(1 + i \frac{(l + r)^n - 1}{r}\right) = \int_o^n \rho(t) dt$$

y de aquí, por derivación con respecto a n

$$\rho(t) = \frac{i(1 + r)^n \log e\,(1 + r)}{r - i + i\,(1 + r)^t} = \partial \log e\,[r - i + i\,(1 + r)^n] \quad [11]$$

que nos expresa el valor del tanto instantáneo de interés para este régimen de capitalización.

Recíprocamente, fijado [11] como tanto instantáneo de interés para un determinado régimen de capitalización, vemos deberá verificarse

$$\varphi(n) = \varphi(o)^{\int_o^n \partial \log_e (r - i + i\,(1 + r)^t) dt} =$$

$$= \varphi(o) e^{[\log_e (r - i + i\,(1 + r)t]_o^n} =$$

$$= \varphi(o) e^{\log e\,(r - i + i\,(1 + r)^n - \log r} =$$

$$= \varphi(o) e^{\log \left(1 + i \frac{(1 + r)^n - l}{r}\right)} = \varphi(o) \left(1 + i \frac{(1 + r)^n - l}{r}\right)$$

reproduciéndonos la [10].

V

SOBRE LA ESCINDIBILIDAD

Supuesta la incorporación al capital de los intereses acumulados en un momento cualquiera t, $(o < t < n)$, se obtendría

$$\varphi(t) = \varphi(o) \left(1 + i \frac{(1 + r)^t - l}{r}\right)$$

y si suponemos igualmente que este capital, produciendo i por uno de interés anual desde ese instante hasta el término, en que se capitalizan al tanto r,

$$\varphi(n) = \varphi(o) \left(1 + i \frac{(1 + r)^t - 1}{r}\right) \left(1 + i \frac{(1 + r)^{n-t} - 1}{r}\right)$$

representará el montante o capital final de la operación.

La escindibilidad obliga al cumplimiento de la igualdad

$$\varphi(o)\left(1 + i\,\frac{(1+r)^t - l}{r}\right)\left(1 + i\,\frac{(1+r)^{n-t} - 1}{r}\right) =$$

$$= \varphi(o)\left(1 + i\,\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right) \qquad [12]$$

o, lo que es lo mismo, simplificando y ordenando:

$$\left(\frac{i}{r} - \frac{i^2}{r^2}\right)\left[(1+r)^{n-t} + (1+r)^t - (1+r)^n - 1\right] = 0$$

Haciendo $(1 + r)^t = x$, se llega a la ecuación

$$x^2 - [(1+r)^n + 1]\,x + (1+r)^n = 0$$

que tiene por raíces

$$x_1 = (1+r)^n = (1+r)^t\,(t = n) \text{ y } x_2 = 1 = (1+r)^t\,(t = 0)$$

que señala que no existe ningún $t \neq$ de 0 y n (origen y término) que cumpla la condición [12]; luego el régimen nó es escindible.

V I

SOBRE LA FRECUENCIA

Puede ocurrir que los intereses se devenguen por trimestres, semestres, etc., en cuyo caso hemos de modificar la fórmula [10], incorporando la «frecuencia» con que aquellos se abonan dentro del año. Como en este caso, al término de cada m-simo de año, se entrega i/m por uno del capital, se tendría

$$\varphi(n)^{(m)} = \varphi(o)\,(1 + i\,(\overset{(m)}{S}_{\overline{n}|r}) =$$

$$= \varphi(o)\left(l + i\,\frac{(1+r)^n - 1}{j(m)}\right) \quad \left(j(m) = m\left[(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1\right]\right.$$

que es la expresión deseada.

V I I

ESTUDIO DE UNA FORMULA MAS GENERAL

Puede ocurrir que el capital productor esté invertido en títulos de renta fija, en cuyo caso el interés lo será sobre el nominal. pero al incorporarse al término al capital, la cuantía de éste dependerá de su cotización en ese momento. El capital final que correspondería en este régimen de capitalización sería

$$\varphi(n)_{i,r} = \varphi(o)\,(c + i\, S_{\overline{n}|r}) = \varphi(o)\left(c + i\,\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right) \qquad [14]$$

en donde $\varphi(o)$ es el nominal y c la cotización por uno de los títulos.

Si el interés se abona con frecuencia m, entonces

$$\varphi(n)^{(m)}{}_{i,r} = \varphi(o)\,(c + i\, \overset{(m)}{S}_{\overline{n}|r}) = \varphi(o)\left(c + i\,\frac{(1+r)^n - l}{j(m)}\right) \qquad [15]$$

representaría el montante o capital final logrado al término.

El sistema que hemos definido podría expresarse como «régimen de capitalización liquidable al término y a dos tantos de interés».

VIII

OPERACIONES FINANCIERAS A LAS QUE ES APLICABLE EL SISTEMA

En la actualidad, este régimen de capitalización se está utilizando tácitamente en:

a) Las imposiciones a plazo fijo, con abono de los intereses trimestral, semestral o anualmente, en los que éstos, al no incorporarse de inmediato al capital, se colocan marginalmente a otro tipo de interés, hasta el término convenido de la operación.

b) En la suscripción de empréstitos reembolsables a plazo fijo, cuyos intereses se acumulen independientemente hasta la entrega del capital.

c) En todos aquellos casos en que un capital no deba ser disponible hasta una fecha determinada, por ejemplo, mayoría de edad, no siéndolo tampoco los intereses producidos por el mismo hasta el término.