CARACTERIZACION DE LA CONVERGENCIA CONDICIONAL DE LAS SERIES REALES

Por
JESUS GOMEZ SANCHEZ

Consideremos una serie cualquiera de términos reales

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

su suma parcial n-ésima

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1}$$

se puede expresar en la forma

$$s_n = \sigma_m - \tau_p$$

donde

$$\sigma_m = v_1 + v_2 + \dots + v_m \qquad ; \qquad \tau_p = w_1 + w_2 + \dots + w_p$$

son las sumas parciales genéricas de la serie de términos positivos y la serie de términos negativos en módulo, respectivamente, procedentes de la serie inicial, en orden correlativo.

La suma parcial n-ésima de la serie de módulos, es, pues,

$$S_n = \sigma_m + \tau_p \,.$$

Cuando la serie de módulos es convergente, lo es cada σ_m y τ_p. Recíprocamente, cuando son convergentes ambas σ_m y τ_p, la serie es absolutamente convergente. De modo que la convergencia absoluta de la u-serie está caracterizada por la convergencia simultánea de la v-serie y de la w-serie. Estas últimas afirmaciones son bien conocidas.

Nos centraremos en el análisis de condiciones características de la convergencia cuando no es absoluta, la llamada «convergencia condicional».

Cuando la serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

converge, pero no la serie de sus módulos, se verifica necesariamente que

$$\sigma_m \longrightarrow \infty \qquad \text{y} \qquad \tau_p \longrightarrow \infty$$

pues si así no fuera, la u-serie sería o bien convergente absolutamente, o bien divergente. En estas hipótesis, se tiene

$$s_n = \sigma_m - \tau_p = \sigma_m \left(1 - \frac{\tau_p}{\sigma_m}\right)$$

de donde

$$1 - \frac{\tau_p}{\sigma_m} = \frac{s_n}{\sigma_m} \longrightarrow 0$$

porque la sucesión s_n es acotada al ser convergente, mientras que la sucesión σ_m es un infinito. Es decir, los infinitos σ_m y τ_p son equivalentes, porque

$$\lim \frac{\tau_p}{\sigma_m} = 1.$$

Podemos, pues, hacer

$$\frac{\tau_p}{\sigma_m} = 1 - \xi_n \quad , \quad \text{donde } \xi_n \longrightarrow 0.$$

Por tanto

$$s_n = \sigma_m - \tau_p = \sigma_m - \sigma_m (1 - \xi_n) = \sigma_m \cdot \xi_n$$

y para la convergencia de la u-serie es requerido que los infinitésimos ξ_n y $1/\sigma_m$ sean del mismo orden, o bien ξ_n sea de orden infinitesimal mayor que $1/\sigma_m$.

Verificada la primera condición necesaria, de equivalencia de los infinitos σ_m y τ_p, la última condición es, desde luego, suficiente para la convergencia de la u-serie.

En resumen, hemos llegado a la conclusión:

«Condición necesaria y suficiente para la convergencia condicional de una serie de términos reales es que

1) Las sucesiones σ_m y τ_p sean infinitos equivalentes; juntamente con

$$\textbf{2)} \quad \xi_n \text{ y } 1/\sigma_m \ , \ \text{donde } \xi_n = 1 - \frac{\tau_p}{\sigma_m},$$

sean infinitésimos del mismo orden; o bien, ξ_n sea infinitésimo de orden superior al infinitésimo $1/\sigma_m$.»