LA LOXODROMIA, LA ORTODROMIA, EL CIRCULO Y LA RECTA DE ALTURA EN LA PROYECCION MERCATORIANA*

por

JESUS MIR

Con anterioridad a las cartas de *proyeccion mercatoriana*, la navegación utilizaba las de *reticula cuadrada* (cartas planas), en que meridianos y paralelos constituían un reticulado al grado, con lo que se obtenía una distancia real entre puntos del ecuador y entre puntos de un mismo meridiano.

El navegante portugués Núñez, conocido por Nonius (1492-1577), inició en 1546 la teoría de la *loxodromia* en su tratado *De arte atque ratione navigandi* (Coimbra), haciendo observar que esta curva, corta a los meridianos bajo ángulo constante y que los polos son puntos asintóticos de la misma. Simón Stevin (1548-1620), Inspector de diques de los Países Bajos y competente físico, estudió la curva, como lo hizo Snell Van Royen, llamado Snellius (1591-1626), medidor del arco de meridiano entre Bergen-op-Zoom y Alkmaar. Más tarde, Halley (1656-1742), director del Observatorio de Greenwich y descubridor del cometa de su nombre, demostró que la *loxodromia* es la proyección estereográfica de la espiral logarítmica. Pero fue G. Kremer, que se consagró bajo el seudónimo de Mercator (1512-1594), al que inexplicablemente vemos confundir por algún autor con el constructor de las fuentes de Versalles, quien a mitad del siglo dieciséis comprendió primero la necesidad de la *latitud creciente* para transportar la *loxodromia* al plano en magnitud y dirección, dando así efectividad a la proyección que lleva su nombre, que tan inestimables servicios ha prestado y viene prestando a los navegantes. Si a Mercator le cabe, sin duda alguna, ser el descubridor de la latitud creciente, en una ocasión hemos hallado atribuida a E. Wrigt su expresión matemática, lo que, de ser así, no restaría mérito alguno al primero.

Mercator era flamenco, grabador de profesión, que al servicio de Carlos V se mostró muy hábil constructor de globos terráqueos y ce-

* Las llamadas 1), 2), etc. se refieren a las Notas Complementarias del final.

lestes, y que en 1550, ejerciendo de cosmógrafo del Duque de Cleves, ideó la proyección de su nombre, utilizando la cual preparó un atlas, que fue publicado poco después de su muerte, atlas que seguía al de Ortelius (1527-1598), primero en su género. El descubrimiento de Mercator era muy oportuno, pues cuando tuvo lugar hacia sólo unos veintitres años que el francés J. Fernel (1497-1558), que tanto renombre había adquirido como médico de Diana de Poitiers, había medido el arco de un grado de meridiano entre París y Amiens, con tan buen método y fortuna que el valor que le atribuyó conducía a una longitud que difiere sólo en algo así como 57 km. de la hoy aceptada para el ecuador terrestre, con lo que el arco al grado de ecuador quedaba determinado con error aproximado a la décima de milla, notablemente pequeño para aquellos tiempos. Con ello la *loxodromia* entraba a figurar en cartografía con la realidad de sus dos propiedades. angular y longitudinal.

Se sabe que en la carta de Mercator, a un punto de coordenadas terrestre L, l, le corresponde otro de coordenadas rectangulares $x = L$, $y = \lambda$, siendo λ la llamada *variable de Mercator* o *latitud creciente* (1). Para unidad de medida se toma la unidad de ordenada adecuada (eje vertical), y los ejes se graduan de minuto en minuto de longitud y latitud, y como λ es variable lo es también la escala de minutos en latitud. Más como la latitud creciente es precisamente la integral del factor que corrige la reducción que con el aumento de latitud experimenta la longitud geométrica del arco de ecuador elemental, resulta que en la representación que nos ocupa, la escala de medida vertical es válida para latitudes y longitudes, y también para una dirección cualquiera (2). Para determinar en millas marinas la distancia entre dos puntos, P_1 y P_2, de latitud respectiva l_1, l_2 se toma la distancia P_1 P_2 con un compás de puntas y se lleva a la escala vertical P'_1 (λ_1), P'_2 (λ_2), de modo que su punto medio O corresponda a la latitud media $\frac{1}{2}(l_1 + l_2)$. La distancia buscada es $\lambda_2 - \lambda_1$ (3).

La transformación mercatoriana es *conforme* y, por tanto, conserva los ángulos y a los meridianos y paralelos corresponden dos haces ortogonales de rectas paralelas (4).

También se sabe que la *loxodromia* es la ruta que forma un ángulo constante con los meridianos sucesivos y que es una espiral esférica, que en las proximidades de los polos se convierte en espiral logarítmica.

Fácilmente se comprende el interés de la proyección de Mercator, pues siendo *conforme*, al conservar los ángulos transforma a la *loxodromia* en una recta, pues sólo una recta puede cortar bajo ángulo constante al haz paralelo de meridianos (5). Este ángulo es precisamente el azimut de ruta $Z(\ )$, o rumbo efectivo $R(e)$.

Por dos puntos del globo pasan una infinidad de *loxodromias*, una. la directa, práctica y usual, que en la carta une de un trazo rectilíneo las dos situaciones. Es la más corta y corresponde a la mínima variación de longitud. Las otras dan sucesivas vueltas a la tierra antes de alcanzar la situación de llegada y son difíciles de representar directamente en la carta, pero un sencillo artificio permite hacerlo, lo que sólo tiene interés teórico (6).

Como la escala vertical de medida es válida según dicho para una dirección cualquiera, la proyección de Mercator transporta linealmente al plano la *loxodromia* y prácticamente la desarrolla en magnitud. En otras palabras, la proyección mercatoriana mide ángulos y distancias, que es cuanto puede desear el navegante.

Estas propiedades fundamentales que han impuesto en navegación este sistema de representación, están enturbiadas por defectos menores: Las superficies se exageran con la aproximación a los polos, y Groenlandia, por ejemplo, aparece en la carta del mundo con una superficie sensiblemente equivalente a América del Sur, cuando en realidad su extensión es tan sólo de una dédima parte. Da cuenta de ello el rápido incremento de la latitud creciente en las altas latitudes, pues a la latitud 70º = 4200′, le corresponden en la carta 5965′,9; a 80º = 4800′ le corresponden 8375′,2; a 89º = 5340′, le corresponden 16300′; y a 90º por ser la variable de Mercator el logaritmo de una tangente, le corresponderían infinitos minutos de arco.

Cuando se navega entre dos puntos muy alejados, para ahorrar tiempo y combustible se hace siguiendo la ruta del arco de círculo máximo que los une, que corta a los sucesivos meridianos según ángulos distintos y que es la mínima distancia que separa aquellos puntos. Se navega entonces según la *ortodromia* u *ortodrómicamente* (7). Así, por ejemplo, la ruta *ortodrómica* acorta en 160 millas la navegación entre Brest y Nueva York; en 215 millas entre Bergen y La Habana, y en 265,9 millas entre San Francisco y Yokohama.

Para navegar *ortodrómicamente* de P_1 a P_2 se calcula en P_1 el azimut del arco de círculo máximo P_1P_2, resolviendo el triángulo esférico PP_1P_2 (Polo-Punto de partida-Punto de llegada) y se determina el ángulo inicial de ruta (8). Transcurrido cierto tiempo, el día siguiente, por ejemplo, siendo P'_1 la situación, se determina de la misma forma el azimut del círculo máximo P'_1P_2, etc., y así resulta que, en la práctica, la ruta se divide en un número determinado de rutas elementales *loxodrómicas*, que en la carta vendrán representadas por trazos rectilíneos, que en conjunto constituirán una línea quebrada.

Según se dirá enseguida, la imagen de un círculo de la esfera sobre la carta es una curva y si este círculo es máximo, excepción hecha de meridianos y ecuador, esta curva es una sinusoide. En el hemisferio norte de la carta la imagen del círculo máximo gira la concavidad hacia el S. y en el hemisferio sur hacia el N. (9).

A primera vista, sobre la carta, la *ortodromia*, que une la situación de salida con la de llegada según un arco de curva, parece más larga que la *loxodromia* que las une según una recta, pero estando la primera más al N. en el hemisferio norta y más al S. en el hemisferio sur, la medida real a la unidad de escala vertical de la carta, suma de un número determinado de arcos finitos de curva, resulta más corta también en la carta para la *ortodrómica* que para la *loxodrómica*, como debe ser, ya que la representación mercatoriana mide distancias. La *ortodromia* se sustituye en la práctica por una quebrada de *loxodromias*, que ofrece la misma aparente anomalía que se explica razonando idénticamente.

Queda sobreentendido que siendo sólo válida la ruta *ortodrómica* para grandes distancias, en lo anterior se han supuesto cartas generales, es decir, de pequeña escala, en las que se aprecia sensiblemente la influencia de la variable de Mercator.

Si la representación mercatoriana por *conforme* conserva la similitud de figuras infinitamente pequeñas, no sucede así con las finitas, por lo que tiene interés conocer cómo se transforma un círculo de altura. Se demuestra que, según que la altura del astro observado sea mayor o menor que su declinación, la proyección del círculo de altura sobre la carta es una elipse o una sinusoide, y si la altura es igual a la declinación. la proyección es una curva simétrica con dos asíntotas verticales (10), El resultado es que en nigún caso el transporte del círculo de altura a la carta es fácil, ni cómodo, ni mucho menos práctico, aparte que imposible en cartas de cierto punto. De ahí el porqué de la recta de altura, bien conocida de todos, que permite establecer la situación, esto es determinar gráficamente la longitud y latitud.

El círculo de altura se sustituye por su tangente en las proximidades de la situación, que por la estima se conoce aproximadamente. La sustitución de un arco de círculo de altura por su tangente puede hacerse si la altura del astro no es muy grande (como máximo unos 65°), pues entonces la curvatura no es notable y en los alrededores del zenit un punto del círculo se confunde prácticamente con el de la tangente para distancias del arco de 30′ a cada lado del zenit (11). La tangente al círculo de altura determina con el centro de la esfera un plano que la corta según un círculo máximo, al que también aquella recta es tangente. Los dos círculos son tangentes entre sí y por tanto el ángulo de su punto de tangencia es nulo. En la carta, las proyecciones de los dos círculos son también tangentes entre si porque el sistema de transformación es *conforme* y tienen por tangente única la representación mercatoriana de la recta de altura.

Como en la carta no es generalmente dado poder situar el astro, de cuyo ángulo horario y declinación es sin embargo fácil pasar a longitud y latitud, se calcula simplemente su azimut por la fórmula del seno o de la cotangente (12), o se determina aún más fácilmente con el compás debidamente corregido, y por el punto de situación estimada *Pe* se traza la dirección *Pe* A de azimut calculado o medido y sentido adecuado. La perpendicular por *Pe* a $P_e A$ es una primera aproximación de la recta de altura, pues la tangente al círculo de altura es perpendicular a su radio esférico y la transformación conserva los ángulos. La recta transformada es sólo una primera aproximación, porque la altura del astro obtenida en la observación es la correspondiente al zenit verdadero, esto es, al zenit del observador, que, salvo muy rara excepción, es distinto al zenit del punto estimado, para el que se puede calcular cuál hubiera sido la altura del astro en él. En efecto, conocido el horario Greenwich del astro por el almanaque náutico y la longitud estimada, se conoce el horario lugar estimado del astro, y la fórmula fundamental permite calcular la altura buscada. La diferencia entre las alturas observada y calculada «intercept» o «apartamiento» (diferencia entre radios esféricos de dos círculos de altura) se lleva en la recta de azimut a partir del punto estimado *Pe* hacia el astro o en dirección contraria, según el «apartamiento» sea positivo o negativo, y por el punto P_1 obtenido se traza la perpendicular a *Pe A*, la recta de altura (13), Una segunda observación da una segunda recta de altura. Si el observador no se hubiera movido, la situación sería la intersección de la primera y segunda rectas, pero como entre las observaciones ha habido navegación, hay que transportar la primera recta paralelamente a sí misma una distancia igual a la navegada en la dirección de esta navegación, una porción de loxodromia en la esfera, un segmento rectilíneo en la carta. En la práctica este traslado equivale a trazar la primera recta de altura en el punto estimado de la segunda observación, empleando desde luego el «apartamiento» y azimut de la primera observación. La intersección de la primera recta de altura trasladada con la segunda, es la situación en el instante de la segunda observación. La segunda recta del altura puede ser una latitud, la verdadera determinada a mediodía, pues la proyección mercatoriana de un paralelo es una recta horizontal (14).

Si se hicieran tres observaciones, debido a los errores acumulados las tres rectas de altura seguramente no coincidirían en un punto y dibujarían un pequeño triángulo. Como situación se tomaría el punto equidistante de los tres lados, o sea el de intersección de las bisectrices.

NOTAS COMPLEMENTARIAS

(1) La variable de Mercator o *latitud creciente* es,

$$d\lambda = \frac{dl}{\cos l} \; ; \; \lambda = \int_0^l \frac{dl}{\cos l} = \mathrm{Lg}\, tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2} \right)$$

(2) La longitud del arco elemental de *loxodromia* es: en la esfera $ds = \sqrt{(d\mathrm{L})^2 \cos^2 l + (dl)^2}$; en la carta $d\delta = \sqrt{(d\mathrm{L})^2 + (d\lambda)^2}$ y como $\cos l < 1$, $dl < d\lambda$, es $ds < d\delta$. Pero midiendo en la carta con la unidad de escala vertical se tiene

$$d\delta = \sqrt{[(d\mathrm{L})^2 + (d\lambda)^2] \cos^2 l} = \sqrt{(d\mathrm{L})^2 \cos^2 l + (dl)^2} = ds$$

(3) Es

$$d = \overline{\mathrm{P}_1 \mathrm{P}_2} \cos \frac{l_1 + l_2}{2}$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \overline{\mathrm{P}'_1 \mathrm{P}'_2} \cos \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

Como se hace

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

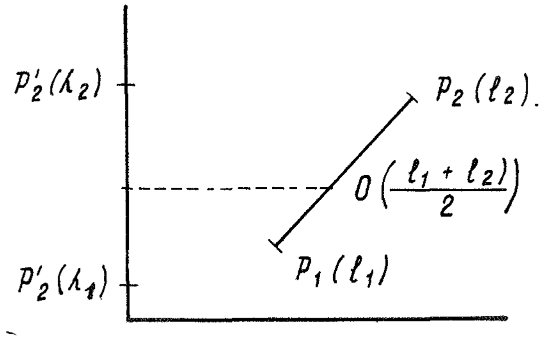

Fig. 1

se tiene

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \overline{P'_1 \, P'_2} \cos \frac{l_1 + l_2}{2}$$

y como además

$$\overline{P_1 \, P_2} = \overline{P'_1 \, P'_2}$$

se tiene

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \overline{P_1 \, P_2} \cos \frac{l_1 + l_2}{2} = d$$

(La regla no es válida para latitudes muy altas en que λ crece desmesuradamente.)

(4) Una transformación de la esfera al plano es *conforme*, es decir, conserva los ángulos. cuando se verifica:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right] \cos^2 l \, ;$$

$$\frac{\partial x}{\partial L} \; \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial L} \; \frac{\partial y}{\partial l} = 0$$

Como en la mercatoriana es

$$x = L \, , \, y = \lambda = Lg \, tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2}\right)$$

se tiene

$$\frac{\partial x}{\partial L} = 1 \, , \, \frac{\partial x}{\partial l} = 0 \, , \, \frac{\partial y}{\partial L} = 0 \, , \, \frac{\partial y}{\partial l} = \frac{1}{\cos l}$$

y las relaciones de condición son identidades.

(5) En el triángulo elemental ABC es $\overline{AB} = \overline{AC}$ sen Z, $\overline{BC} = \overline{AC}$ cos Z, o sea cos $l\, d$L = sen Z ds, dl = cos Z ds, de las que

$$dL = \frac{dl}{\cos l}\, tg\, Z,$$

que integrada y en virtud de (1), puesto que Z = Constante, es

$$L - L_0 = tg\, Z \int_0^l \frac{dl}{\cos l} = (\lambda - \lambda o)\, tg\, Z$$

ecuación de la *loxodromia* en la esfera.

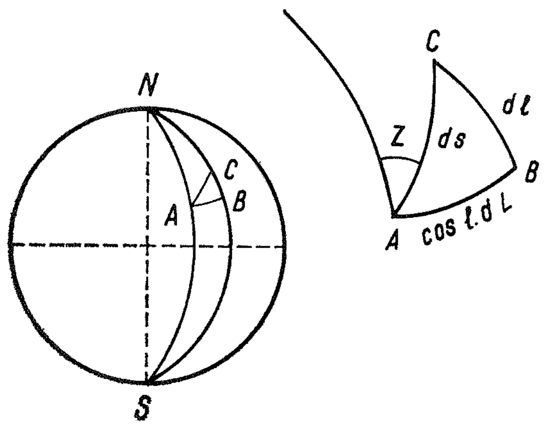

Fig. 2

En la carta es x = L , $y = \lambda$, y en ella la ecuación es $y - y_0 = (x - xo)$ cot Z una recta.

Se colocan dos cartas idénticas representando la totalidad del globo una al lado de otra. Entre P_1 y P_2 la *loxodromia* directa es el segmento rectilíneo $P_1\ P_2$.

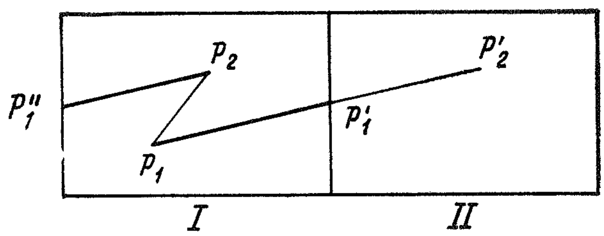

Fig. 3

Si P'_2 representa a P_2 en la carta II, la *loxodromia* P'_1 P'_2 representa el camino más una vuelta al globo. En la primera carta P_1 P'_2 queda representado por $P_1P'_1$ + P''_1 P_2, con una simple traslación paralela de P'_1 P'_2. Con tres cartas se obtendría la *loxodromia* que da dos vueltas al globo, etc.

(7) La mínima distancia entre dos puntos de la esfera corresponde al círculo máximo que los une, la *ortodromia*, intersección de la esfera y el plano determinado por su centro y los dos puntos.

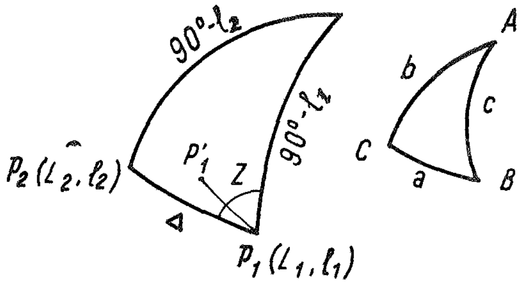

Fig. 4

La distancia *ortodrómica* viene dada por cos Δ = sen l_1 sen l_2 + cos l_1 cos l_2 cos (L_2 — L_1), aplicación de la fórmula fundamental cos a = = cos b cos c + sen b sen c cos A.

(8) El azimut de partida viene dado por

$$\text{sen}\,(L_2 - L_1) \cot Z = \cos l_1 \,tg\, l_1 - \text{sen}\, l_1 \cos (L_2 - L_1)$$

aplicación de la fórmula

$$\text{sen}\, A \cot B = \text{sen}\, c \cot b - \cos c \cos A, \text{ (Fig. 4)}$$

(9) La *ortodromia* es una sinusoide en la carta $\widehat{P_1 P_2}$, apartado (10).

La *loxodromia* un segmento rectilíneo $\overline{P_1 P_2}$.

La diferencia de azimutes *loxo* y *orto* entre dos puntos P_2, P_1, es la corrección de Givry

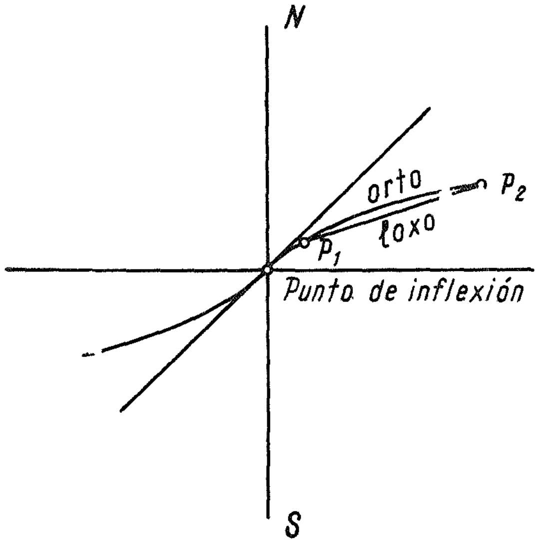

Fig. 5

$$| Z_2 - Z_1 | = \left| \frac{L_2 - L_1}{2} \right| \operatorname{sen} \frac{l_2 + l_1}{2}$$

siempre positiva, puesto que el azimut *loxo* es mayor que el *orto*.

(10) El círculo de altura es el lugar geométrico sobre la esfera celeste, de los zenits de todos los puntos de la tierra en los que, a un instante dado, un determinado astro tiene la misma altura. Tiene por centro la imagen del astro sobre la esfera y por radio la distancia zenital.

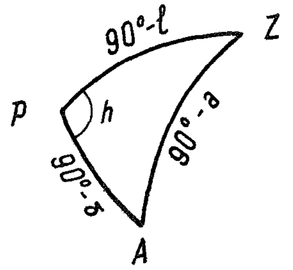

Fig. 6

Si en el triángulo fundamental Astro-Polo-Zenit se escribe la también relación fundamental

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} \partial + \cos l \cos \partial \cos h$$

en donde h es el horario, se tiene la ecuación de un círculo de altura en la esfera, cuyo radio corresponde al arco $90^\circ - a = z$ (distancia zenital).

Se ha visto que

$$\lambda = \text{Lg } tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2}\right)$$

o sea,

$$tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2}\right) = e^{\lambda}$$

Expresando el seno y coseno en función de la tangente, es

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2}\right) = \frac{e^{\lambda}}{\sqrt{1 + e^{2\lambda}}} \ ; \ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\lambda}}}$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + l\right) = \frac{2}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}} \ ; \ \cos\left(\frac{\pi}{2} + l\right) = \frac{e^{-\lambda} - e^{\lambda}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}$$

$$\text{sen } l = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}} \ ; \ \cos l = \frac{2}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}$$

Si se llevan estos valores a la ecuación del círculo de altura en la esfera, se tendrá la del círculo de altura en la carta:

$$e^{\lambda}(\text{sen } a - \text{sen } \delta) + e^{-\lambda}(\text{sen } a + \text{sen } \delta) - 2 \cos \delta \cos h = 0$$

en la que a y δ son constantes, y que es trascendente.

Se pueden distinguir tres casos a los que corresponden tres marchas de la curva, de cuyo detalle nos dispensamos por ser algo prolijo:

I. $a > |\delta|$ Una elipse

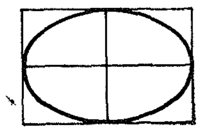

Fig. 7

II. $a < |\delta|$ Caso de un círculo máximo

$$a = 0 \ , \ z = \frac{\pi}{2}$$

Una sinusoide

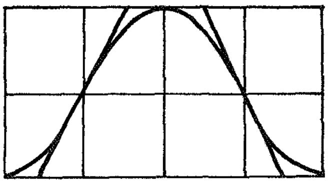

Fig. 8

III. $a = \delta$ Una curva simétrica

con dos asíntotas verticales

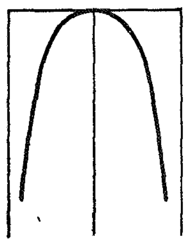

Fig. 9

(11) En el caso más desfavorable, para una altura del astro de 65°, tomando para radio de la tierra R = 6378 km., se tiene para radio de la proyección del círculo de altura sobre el globo

$$r = \overline{AZ} = 2\,\overline{AM} = 2\,R \text{ sen } 12°,5 = 2760{,}90 \text{ km.}$$

A 30′ del zenit, si en vez de considerar el punto P del círculo se toma el P_1 de la tangente, es

$$r + \Delta = \frac{r}{\cos 30'} = 2761{,}01$$

y el error aproximado que se comete con la sustitución del punto circular por el tangencial es $\Delta = 0{,}11$ km. = 110 m. inferior a la décima de milla.

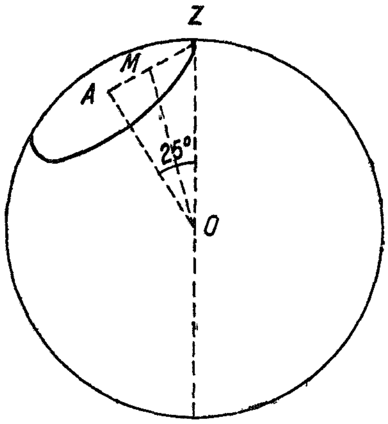

Fig. 10

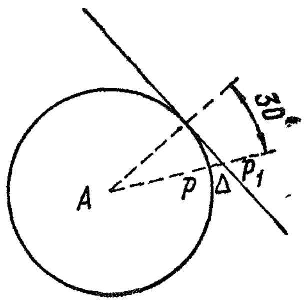

Fig. 11

(12) En el triángulo fundamental, el azimut se calcula con la fórmula de proporcionalidad de senos

$$\frac{\text{sen } Z}{\cos \delta} = \frac{\text{sen } h}{\cos a}, \quad \text{sen } Z = \frac{\cos \delta \text{ sen } h}{\cos a}$$

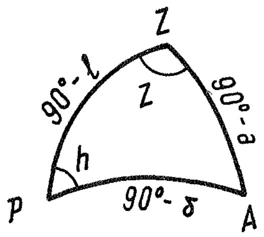

Fig. 12

o con la de las cotangentes, que aplicada al repetido triángulo fundamental es

$$tg\ \delta \cos l = \text{sen } l \cos h + \text{sen } h \cot Z$$

de la que

$$\cot Z = \frac{tg\ \delta \cos l - \text{sen } l \cos h}{\text{sen } h} = \frac{tg\ \delta}{\text{sen } h} \cos l -$$

$$- \frac{\text{sen } l}{\cos l} \frac{\cos h}{\text{sen } h} \cos l = \left(\frac{tg\ \delta}{\text{sen } h} - \frac{tg\ l}{tg\ h} \right) \cos l = p \cos l$$

siendo $p = p' + p''$ el coeficiente Pagel de los navegantes.

(13)

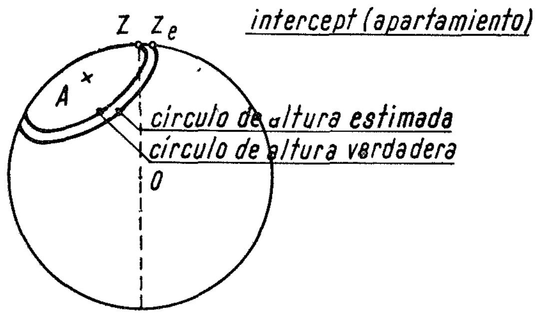

Fig. 13

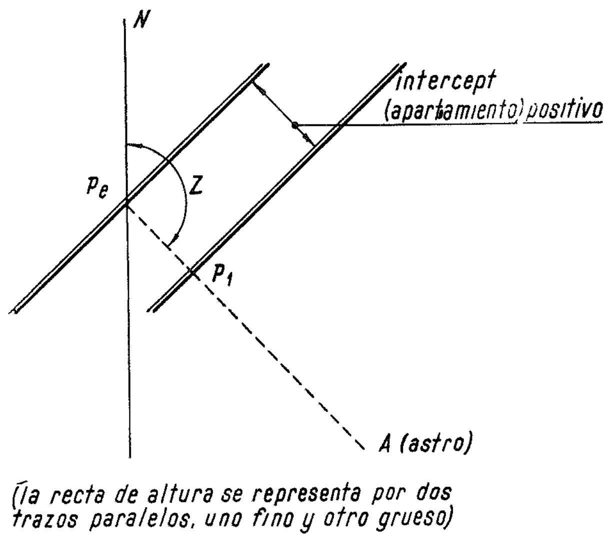

Fig. 14

(14)

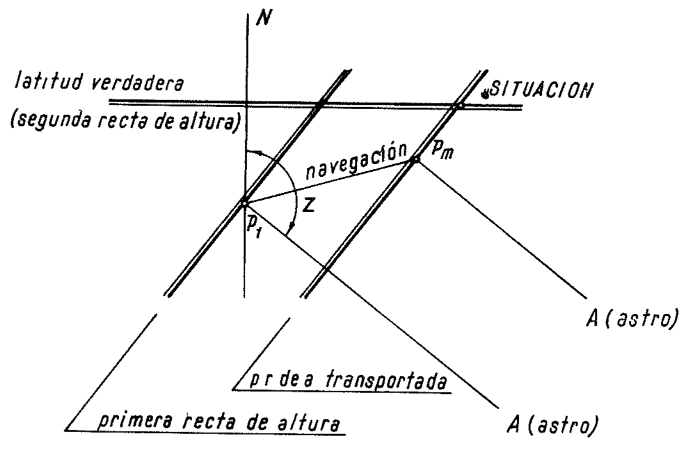

Fig. 15