TANGENTES A UMA CÔNICA

por

FAUSTO MACHADO DA SILVA

Na presente nota, indicamos um processo analítico de determinação das tangentes a uma cônica, traçadas por um ponto não pertencente à curva, e dos respectivos pontos de contato, simultâneamente. Adotamos coordenadas homogêneas e o método matricial e estenderemos o processo ao caso das quádricas.

Designaremos por letras minúsculas as matrizes colunas, como, por exemplo,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

A transposta desta matriz é a matriz linha $\widehat{x} = (x_1\ x_2\ x_3)$. (*)

p, q, r, s são matrizes colunas cujos elementos são as coordenadas homogêneas dos pontos P, Q, R, S, respectivamente, e u, v, w, matrizes colunas cujos elementos são as coordenadas plückerianas homogêneas de retas indicadas (ou de planos, no caso das quádricas). As transpostas dessas matrizes são as matrizes linhas $\widehat{p}$, $\widehat{q}$, $\widehat{r}$, $\widehat{s}$, $\widehat{u}$, $\widehat{v}$, $\widehat{w}$.

A matriz transposta, a adjunta e o determinante de uma matriz A serão designados por A, A′ e |A|, respectivamente.

Designaremos por letra maiúscula tôda matriz anti-simétrica associada à matriz coluna designada pela mesma letra, minúscula, como, por exemplo,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Faremos uso do seguinte

Lema.—Os vértices de um triângulo autopolar com relação à cônica de equação $\widehat{x}A\widehat{x} = o$ satisfazem à relação

$$\rho r = A'Pq \qquad [1]$$

onde ρ é um fator de proporcionalidade ($\neq$ O).

(*) El arco superpuesto a una letra sustituye al signo $\sim$ superpuesto a la misma.

Seja P *o* ponto dado, não pertencente à cônica. Sôbre a polar de P, tomemos um ponto arbitrário Q não pertencente à cônica. Êsses pontos são, pois, conjugados. A reta definida por êles tem por equação

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = O \quad ou\ x.p \wedge q = o$$

ou ainda $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} O & -p_3 & p_2 \\ p_3 & O & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = O$, isto é, $\widehat{x}Pq = o$.

Podemos pôr, então,
$\lambda w = p \wedge q = Pq$ (coordenadas pluckerianas da reta $\overline{PQ}$).

Mas

$\mu r = A'w$ (coordenadas cartesianas do polo R da reta $\overline{PQ}$).

Então, por substituição adequada,

$$\rho r = A'Pq \qquad \text{Q.E.D.}$$

Os pontos P e Q são conjugados do ponto R, em virtude de pertencerem à polar de R. Os três pontos são, pois, os vértices de um triângulo autopolar.

I) Aos vetores característicos da matriz A′P correspondem os pontos de contato das tangentes à cônica, traçadas a partir do ponto P.

De fato, se o ponto R, considerado variável, se aproxima e atinge a cônica através da reta $\overline{QR}$ (polar do ponto P), êle coincide com o ponto Q e o triângulo autopolar se degenera em tangente à cônica. Então, de [1], se tem

$$(A'P - \rho I)\, q = o.$$

Trata-se, pois, de determinar os vetores característicos de A′P.

Para isso, calcularemos as raízes características e, a seguir, determinaremos a adjunta de (A′P — ρI).

$$A'P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -p_3 & p_2 \\ p_3 & O & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & O \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{12}p_3 - A_{13}p_2 & A_{13}p_1 - A_{11}p_3 & A_{11}p_2 - A_{12}p_1 \\ A_{22}p_3 - A_{23}p_2 & A_{23}p_1 - A_{12}p_3 & A_{12}p_2 - A_{22}p_1 \\ A_{23}p_3 - A_{33}p_2 & A_{33}p_1 - A_{13}p_3 & A_{13}p_2 - A_{33}p_1 \end{pmatrix}.$$

Como se verifica fàcilmente, o traço de A′P é nulo e, portanto, é nulo o coeficiente de ρ^2 na equação característica.

Sendo $|P| = O$, será $|A'P| = O$ e uma das raízes características é nula

Para completar a equação, determinaremos o traço da adjunta de A'P:

$$(A'P)' = |A|\ P'A = |A| \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ p_1p_2 & p_2^2 & p_2p_3 \\ p_1p_3 & p_2p_3 & p_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= |A|\ p\widehat{p}A = \mu\ |A|\ p\widehat{u} = \lambda\ p\widehat{u}, \qquad [2]$$

pois, $P' = p\widehat{p}$, $\widehat{A} = A$, $\mu u = Ap$ e $\mu\widehat{u} = \widehat{p}A$.
($\mu u = Ap$, coordenadas plückerianas da polar de P).

Como se verifica fàcilmente, o traço da adjunta de A'P é $|A|\ \widehat{p}Ap$, que pode ser positivo, nulo (se o ponto dado P pertencer à cônica) ou negativo.

A equação característica é, então,

$$\rho^3 + |A|\ \widehat{p}Ap.\ \rho = o,$$

cujas raízes são

$$\rho_1 = o, \quad \rho_2 = +\sqrt{-\ |A|\ \widehat{p}Ap} \quad e \quad \rho_3 = -\sqrt{-\ |A|\ \widehat{p}Ap}.$$

Deixamos de considerar o caso $\widehat{p}Ap = o$, pois pertencendo o ponto dado à cônica, teremos apenas que lhe determinar a polar.

$|A|\ \widehat{p}Ap$ será positivo ou negativo, conforme o ponto dado seja interior ou exterior à cônica, respectivamente.

Determina-se, a seguir, a adjunta de $(A'P - \rho I)$ e tem-se,

$$(A'P - \rho I)' = \rho^2 I + \rho A'P + (A'P)'. \qquad [3]$$

Qualquer das colunas desta matriz, cujos elementos não sejam todos nulos para o valor de ρ (raíz característica) a substituir, fornece o ponto de contato (vetor característico) correspondente àquele valor de ρ.

II) As linhas da matriz $(A'P - \rho I)'$ resolvem, para os mesmos valores de ρ, o problema dual, isto é, fornecem as tangentes correspondentes.

Considerando que, para o problema dual, isto é, o da determinação das tangentes, chegariamos, por análogo raciocinio, à matriz $(AU - \rho I)'$, trata-se aqui de mostrar que esta matriz é a transposta da matriz $(A'P - \rho I)'$, isto é,

$$\widetilde{(A'P - \rho I)'} = (AU - \rho I)' \text{ ou que } \widetilde{(A'P)} = AU, \text{ onde } U =$$

$$= \begin{pmatrix} O & -u_3 & u_2 \\ u_3 & O & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & O \end{pmatrix}.$$

Desde que um terno de números ou qualquer outro formado por números proporcionais aos primeiros representam, indistintamente, o mesmo ponto (ou a mesma reta), podemos desprezar os fatores de proporcionalidade e escrever, por exemplo,

$$v = Aq \qquad [4]$$

para obtenção das coordenadas plùckerianas da polar de Q, ou

$$u = Ap$$

para as coordenadas pluckerianas da polar de P.

Multiplicando a [4] à esquerda por —U, temos

$$-Uv = -UAq. \qquad [5]$$

Sendo o ponto R a interseção das polares de P e de Q, temos

$$r = v \wedge u = -u \wedge v = -Uv \qquad [6]$$

Mas, em virtude de [1], podemos pôr

$$r = A'Pq \qquad [7]$$

e, em vista de [6] e [7], $\quad -Uv = A'Pq. \qquad [8]$

De [5] e [8], temos $\quad A'Pq = -UAq$

$$A'P = -UA = (\widetilde{AU}), \text{ sendo } \widetilde{U} = -U$$

e

$$(\widetilde{A'P}) = AU \qquad \text{Q.E.D.}$$

III) Verifica-se que

1.º à raíz característica nula correspondem o ponto dado e sua polar, pois a adjunta de $(A'P - \rho I)$ será, no caso, em virtude de [2] e [3],

$$(A'P)' = \lambda\, p\widehat{u}$$

que fornece, segundo uma coluna e uma linha, o ponto dado e sua polar.

2.º para cada valor de $\rho \neq o$, a coluna da matriz $(A'P - \rho I)'$ fornece um ponto de contato e a sua linha, a tangente relativa ao outro ponto de contato.

Trata-se aqui de mostrar que é nula a matriz

$$C = (A'P - \rho_2 I)'\,(A'P - \rho_3 I)' = ((A'P - \rho_3 I)\,(A'P - \rho_2 I))'.$$

Sendo $\rho_3 = -\rho_2$,

$$C = ((A'P + \rho_2 I)\,(A'P - \rho_2 I))' = ((A'P)^2 - \rho_2^2 I))'.$$

Efetuando a operação $(A'P)^2$, obtem-se

$$(A'P)^2 = (A'P)' + \rho_2^2 I. \qquad [9]$$

Então, $C = ((A'P)')' = O.$ $\qquad$ Q.E.D.

3.º em virtude de [3] e [9],

$$(A'P - \rho I)' = (A'P)(A'P + \rho I)$$

para os valores de $\rho \neq o$, o que facilita as aplicações.

No caso tridimensional, com referência às QUÁDRICAS, o problema correspondente é o de planos tangentes traçados por uma reta definida por dois pontos não pertencentes à superfície.

Sejam P e S os pontos dados, não pertencentes à quádrica. Êles definem uma reta que é polar recíproca da reta determinada pelos planos polares daqueles pontos. Sôbre esta última reta, tomemos um ponto arbitrário Q não pertencente à quádrica. O plano definido pelos pontos P, Q e S tem por equação, em coordenadas homogêneas,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = O$$

ou

$$x_1\, x_2\, x_3\, x_4) \begin{pmatrix} O & p_4s_3 - p_3s_4 & p_2s_4 - p_4s_2 & p_3s_2 - p_2s_3 \\ p_3s_4 - p_4s_3 & O & p_4s_1 - p_1s_4 & p_1s_3 - p_3s_1 \\ p_4s_2 - p_2s_4 & p_1s_4 - p_4s_1 & O & p_2s_1 - p_1s_2 \\ p_2s_3 - p_3s_2 & p_3s_1 - p_1s_3 & p_1s_2 - p_2s_1 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_3 \end{pmatrix} = O$$

ou $\widehat{x}Hq = o$, representando por H a matriz anti-simétrica acima.

Temos, então,

$$\lambda w = Hq, \text{ coordenadas plückerianas do plano (PQS).}$$

Mas,

$$\mu r = A'w, \text{ coordenadas cartesianas do polo R do plano (PQS).}$$

Então, por substituição adequada,

$$\rho r = A'Hq \qquad [1']$$

relação a que satisfazem, os quatro pontos P, Q, R e S, formando os seguintes pares de pontos conjugados com relação à quádrica de equação $xAx = o$: P e Q, P e R, Q e R, Q e S, R e S. Os pontos datos P e S não são necessàriamente conjugados e êsses pontos não são necessàriamente os vértices de um tetraedro autopolar.

O processo se desenvolve de modo inteiramente análogo ao que foi feito para as cônicas, tratando-se agora de determinar os vetores característicos da matriz A'H.

BIBLIOGRAFIA

HEADING, J.—*Matrix theory for physicists*. Longmans, 1958.
CASTELNUOVO, G.—*Lecciones de Geometria Analitica*. 1955.