DERIVABILIDAD DEL MODULO DE LAS FUNCIONES REALES Y COMPLEJAS

por

JESUS GOMEZ SANCHEZ

DERIVACION DEL MODULO DE LAS FUNCIONES REALES

Introducción.—Casi todas las operaciones del álgebra de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos son comparadas explícitamente o implícitamente con la operación de extracción de módulo. Asimismo, las operaciones propias del análisis son comparadas con tal operación de extracción de módulo, por ejemplo, se examina la convergencia de una serie numérica y a continuación la posible convergencia de la serie de sus módulos. Es útil cuando se analiza la eventual convergencia de una integral definida de una función real sobre un intervalo infinito, analizar simultáneamente la integral definida sobre el mismo intervalo del módulo de la función real en cuestión.

Al examinar la integral definida de una función real, también se compara con la integral definida del módulo de la función dada.

Estos ejemplos, y otros muchos que podíamos presentar, patentizan la constante comparación que se efectúa de las operaciones más diversas con la operación de extracción de módulo. Sin embargo, tal comparación no se ha tratado en relación con la operación de derivación de las funciones reales. Si bien, en principio, se podría argüir que en cuanto a las funciones reales continuas de signo constante la cuestión es trivial, lo cual no es menos cierto. Empero, con un poco más de detenimiento se presentan dos graves dificultades: Por una parte, no se tiene una expresión algorítmica única que exprese la derivada (supuesta existente) del módulo de una función real, y de otra parte, siendo esta dificultad más grave aún, es que para las funciones reales de signo variable y continuas, posiblemente la descomposición en partes positivas y negativas habría de hacerse en infinitos intervalos, lo cual, por supuesto, ya complicaría excesivamente la cuestión.

La exposición presente está dedicada a un tratamiento uniforme de la materia, de la cual se han obtenido expresiones analíticas muy generales, que creemos tienen más importancia que las cuestiones de existencia que se presentan ligadas a aquéllas.

Derivada del módulo.

Vamos a analizar si el módulo de una función real, definida en un cierto intervalo de la recta real, es una función derivable y cuándo.

Si $f(x)$ es una función real, entonces la función $|f(x)|$ verifica

$$|f(x)| \cdot |f(x)| = f(x)^2 \quad ; \quad |f(x)|^2 = f(x)^2$$

de donde

$$|f(x)| = + \sqrt{f(x)^2}$$

La función módulo se presenta, pues, como función de función. Luego: Si $f(x)$ es derivable, siendo cada variable derivable con respecto a la variable de que inmediatamente depende; luego $|f(x)|$ es función derivable.

Además, la derivada de esta función se obtiene a partir de la regla de la cadena, es decir,

$$D\,|f(x)| = \frac{2\,f(x)\,f'(x)}{+\,2\sqrt{f(x)^2}} = \frac{f(x)\,f'(x)}{+\sqrt{f(x)^2}} = \frac{f(x)\,f'(x)}{|f(x)|} \qquad [1]$$

expresión válida para todos los valores de x, excepto aquellos x_0, tales que $f(x_0) = 0$.

Pero aún en este caso no hemos de renunciar a la existencia de derivada de la función $|f(x)|$ en estos puntos singulares x_0, solamente hemos de cambiar de procedimiento.

Vamos a calcular directamente el límite del cociente incremental en los puntos singulares de [1]:

$$\frac{|f(x_0 + h)| - |f(x_0)|}{h} = \frac{+\sqrt{f(x_0 + h)^2}}{h}$$

si tomamos $h > 0$, se tiene

$$\frac{+\sqrt{f(x_0 + h)^2}}{h} = + \sqrt{\left[\frac{f(x_0 + h)}{h}\right]^2} \longrightarrow + \sqrt{f'(x_0)^2} = |f'(x_0)|$$

si tomamos $h < 0$, análogamente se tiene

$$\frac{+\sqrt{f(x_0 + h)^2}}{h} = - \sqrt{\left[\frac{f(x_0 + h)}{h}\right]^2} \longrightarrow - \sqrt{f'(x_0)^2} = -|f'(x_0)|$$

en resumen, en los puntos x_0, tales que $f(x_0) = 0$, existen derivadas laterales, en general distintas.

La derivada de $|f(x)|$ en un punto singular para [1] existe, en sentido ordinario, si y sólo si coinciden las derivadas laterales, es decir, si y sólo si

$$|f'(x_o)| = - |f'(x_o)|$$

condición ésta equivalente a $f'(x_o) = 0$; los puntos singulares con esta condición restrictiva son todos los puntos singulares y sólo ellos, donde existe derivada ordinaria.

Hemos visto que si una función real $f(x)$ es derivable, entonces la función $|f(x)|$ es también derivable. Ahora probemos la recíproca:

Si una función $f(x)$ es real y continua y la función $|f(x)|$ (continua «a fortiori») es derivable, la función $f(x)$ es derivable en todo punto x_1, tal que $f(x_1) \neq 0$.

En efecto, en un cierto entorno de x_1 se conserva el signo de $f(x)$ y, por tanto, en dicho entorno, denotado como $N(x_1)$, se puede expresar $f(x)$ como

$$f(x) = + |f(x)| \qquad \text{si } f(x_1) > 0, \text{ donde } x \in N(x_1)$$

o bien en la forma

$$f(x) = - |f(x)| \qquad \text{si } f(x_1) < 0, \text{ donde } x \in N(x_1).$$

Por tanto, la función $f(x)$ es derivable en x_1, porque se presenta mediante una combinación aritmética de funciones derivables.

El resultado aludido anteriormente y este último nos dicen que: «Condición necesaria y suficiente para que una función real continua sea derivable es que lo sea el módulo de la función dada» (excluidos a lo más, los puntos singulares de $|f(x)|$).

Determinemos las funciones derivables $f(x)$, tales que para ellas la operación de derivación conmuta con la operación de extraer valor absoluto, simbólicamente

$$D\,|f(x)| = |Df(x)| \qquad [2]$$

y según el resultado [1] esta ecuación adopta la forma

$$\frac{f(x)\,f'(x)}{|f(x)|} = |f'(x)|$$

o sea

$$f(x)\,f'(x) = |f(x)|\,.\,|f'(x)| = |f(x)\,f'(x)|$$

esta ecuación es equivalente a

$$f(x)\,f'(x) > 0,$$

es decir,

$$\operatorname{sg} f(x) = \operatorname{sg} f'(x).$$

De la ecuación [1] podemos deducir una relación más general entre la derivada del módulo de una función y el módulo de su derivada. En efecto, sustituyendo en [1]

$$f'(x) = \text{sg}\,[f'(x)]\,.\,|f'(x)|$$

obtenemos

$$\text{D}\,|f(x)| = \text{sg}\,f(x)\,\text{sg}\,f'(x)\,|\text{D}f(x)| = \pm\,|\text{D}f(x)| \qquad [3]$$

el doble signo en correspondencia con

$$\text{sg}\,f(x) = \text{sg}\,f'(x)$$

$\text{sg}\,f(x) \neq \text{sg}\,f'(x)$, respectivamente.

La ecuación [3] puede ser expresada más convenientemente en la forma condensada

$$|\text{D}\,(\,|f(x)|\,)| = |\text{D}\,f(x)|\,. \qquad [4]$$

Hasta ahora hemos considerado derivadas finitas, vamos a tratar los puntos donde hay derivada infinita. Para ello suponemos que los puntos son aislados, respecto a tal atributo, para $f'(x)$.

Sea x_0 un punto tal, es decir, $f'(x_0) = \pm\,\infty$, se puede utilizar la relación

$$\text{D}\,|f(x)| = \frac{f(x)\,f'(x)}{|f(x)|} \qquad [1]$$

pues se trata de puntos aislados.

Suponemos de momento, $f(x_0) \neq 0$, por tanto, según la continuidad de $f(x)$ en x_0, en un cierto entorno $\text{N}(x_0)$ se verifica la conservación de signo de $f(x)$.

Así, pues, si $f(x_0) > 0$, entonces $f(x) > 0$, para $x \in \text{N}(x_0)$; de donde en virtud de [1]

$$\text{D}\,|f(x)| = f'(x) \qquad \text{para } x \in \text{N}(x_0),\ x \neq x_0$$

por tanto,

$$\lim_{x \to x_0} (\text{D}\,|f(x)|) \neq +\,\infty\,,\,-\,\infty$$

en concordancia con $f'(x_0) = +\,\infty\,,\,-\,\infty$.

Análogamente, si $f(x_0) < 0$, en un cierto entorno de x_0, se verifica

$$\text{D}\,|f(x)| = -\,f'(x)\,; \qquad x \neq x_0$$

y por tanto,

$$\lim_{x \to x_0} (\text{D}\,|f(x)|) = \mp\,\infty\,,$$

correspondientemente a $f'(x_0) = \pm\,\infty$.

En cuanto a las singularidades de [1], donde hay derivada infinita para $f(x)$ en x_0, se tiene que hallar el límite del cociente incremental directamente.

Si x_0 es uno de esos puntos, donde $f(x_0) = 0$, entonces, como ya hemos visto:

$$\frac{|f(x_0 + h)| - |f(x_0)|}{h} = \frac{+\sqrt{f(x_0 + h)^2}}{h}$$

con lo cual

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|f(x_0 + h)| - |f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \sqrt{\left[\frac{f(x_0 + h)}{h}\right]^2} = + \infty$$

si $f'(x_0) = \pm \infty$.

Cuando $h \to 0^-$, se tiene

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|f(x_0 + h)| - |f(x_0)|}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \sqrt{\left[\frac{f(x_0 + h)}{h}\right]^2} = - \infty$$

Lo cual nos dice que los puntos singulares de [1], donde $f(x)$ tiene derivada infinita, la función $|f(x)|$ no tiene derivada infinita ordinaria, pero tiene derivadas infinitas laterales distintas.

Derivada segunda y derivadas sucesivas.

Examinando la relación [1] se observa que es una expresión aritmética de funciones derivables, cuando lo es $f'(x)$; por tanto, existe la derivada segunda de la función $|f(x)|$, excluidos, a lo más, los puntos singulares.

Calculemos la derivada segunda de $|f(x)|$

$$D^2 \; |f(x)| = \frac{[f'(x)^2 + f(x)\, f''(x)] \, . \, |f(x)| - f(x)\, f'(x) \, . \, f(x)\, f'(x)\, |f(x)|}{|f(x)|^2} =$$

$$= \frac{[f'(x)^2 + f(x)\, f''(x)] \, . \, |f(x)|^2 - f(x)^2\, f'(x)^2}{|f(x)|^2 \, . \, |f(x)|}$$

y teniendo presente que

$|f(x)|^2 = f(x)^2$, se concluye

$$D^2\,|f(x)| = \frac{f(x)\,f''(x)}{|f(x)|} \qquad [5]$$

expresión completamente análoga a [1].

La ecuación [5] expresa la derivada segunda de $|f(x)|$ como combinación aritmética de las funciones $f(x)$, $|f(x)|$, $f''(x)$; si esta última función es también derivable, entonces también existe $D^3\,|f(x)|$, la cual se calcula de modo análogo a $D^2\,|f(x)|$. Teniendo presente que $|f(x)|^2 = f(x)^2$, la expresión simplificada es

$$D^3\,|f(x)| = \frac{f(x)\,f'''(x)}{|f(x)|}$$

De modo general, si existen las derivadas sucesivas de la función $f(x)$, también existen las derivadas sucesivas de la función $|f(x)|$, y la derivada n-ésima de $|f(x)|$ (supuesta existente la derivada n-ésima de $f(x)$) tiene la forma

$$D^{(x)}\,|f(x)| = \frac{f(x)\,f^{(n)}(x)}{|f(x)|}$$

la cual se demuestra fácilmente por inducción completa, utilizando la simplificación ya mencionada dos veces.

Aplicaciones de la derivada del módulo.

Por analogía con lo anteriormente expuesto, consideremos la derivación, si es posible, de las funciones reales continuas de la forma $f(|x|)$, siendo $f(u)$ una función real derivable, en su argumento.

La función $f(|x|)$ se presenta como función compuesta, y cada una de las variables que intervienen son derivables, pues $f(u)$ es derivable por hipótesis; $|x|$ es derivable, al serlo la función x, en virtud de lo que precede. Por tanto, la función $f(|x|)$ es derivable. Según la regla de la cadena, se obtiene

$$D\,f(|x|) = f'(|x|)\,.\,D\,|x| \qquad [6]$$

La derivada del segundo factor se calcula con arreglo a la ecuación [1], así, pues,

$$D\,|x| = \frac{x\,.\,1}{|x|} = \operatorname{sg} x$$

sustituyendo el valor de esta derivada en [6], se obtiene

$$D\,f(|x|) = \operatorname{sg} x.\,f'(|x|). \qquad [7]$$

Como aplicación de la expresión general [7] hallemos la derivada de la función $ln\,|x|$, única función (junto con sus funciones compuestas) de la cual se suele dar la derivada, cuando aparece un valor absoluto, en la forma indicada. Así, pues,

$$\mathrm{D}\ ln\ |x| = \frac{1}{|x|} \cdot \mathrm{D}\ |x| = \frac{1}{|x|\ \mathrm{sg}\ x} = \frac{1}{x} .$$

Este ejemplo nos sugiere la consideración de funciones compuestas, con respecto al valor absoluto de otra función. Es decir, funciones reales compuestas de la forma

$$g(|f(x)|) .$$

Si $g(u)$ es una función derivable, en su argumento, y $f(x)$ también es derivable, entonces $|f(x)|$ también es derivable, en virtud de lo expuesto anteriormente; y por tanto, la función compuesta $g(|f(x)|)$ también es derivable; su derivada es, recurriendo a la ecuación [1]

$$\mathrm{D}\ g(|f(x)|) = g'(|f(x)|) \cdot \mathrm{D}\ |f(x)| = g'(|f(x)|) \frac{f(x)\ f'(x)}{|f(x)|} .$$

Finalmente, si las funciones reales $g(u)$ y $f(x)$ son derivables, también lo es la función $|g(|f(x)|)$, pues la función $g(|f(x)|)$, ya ha quedado establecido que es derivable; por tanto $|g(|f(x)|)|$ también es derivable, según la afirmación primera de esta materia.

La derivada de dicha función se obtiene por aplicación reiterada de la ecuación [1], es decir,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\ |g(|f(x)|)| &= \frac{g(|f(x)|)}{|g(|f(x)|)|} \cdot \mathrm{D}\ g(|f(x)|) \\ &= \frac{g(|f(x)|)}{|g(|f(x)|)|} \cdot g'(|f(x)|) \cdot \frac{f(x)\ f'(x)}{|f(x)|} \end{aligned}$$

en definitiva se tiene

$$\mathrm{D}\ |g(|f(x)|)| = \frac{g(|f(x)|)\ g'(|f(x)|)}{|g(|f(x)|)|} \cdot \frac{f(x)\ f'(x)}{|f(x)|} .$$

DERIVADA DEL MODULO DE LAS FUNCIONES COMPLEJAS

Sea una función compleja arbitraria

$$f(z) = u(x, y) + i.\ v(x, y)$$

definida en un dominio abierto del plano complejo, donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones reales arbitrarias, en las variables reales independientes x, y. La función $f(z)$ no es necesariamente derivable, en ese dominio complejo, es decir, analítica.

Vamos cuándo el módulo $|f(z)|$ de la función compleja es derivable, en el sentido complejo, es decir, cuando la función real $|f(z)|$ de variable compleja z es analítica. Para tal consideración utilizamos la expresión de $|f(z)|$ en términos de sus funciones componentes reales

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} + i . O$$

para esta función compleja (en particular real) ser analítica ha de satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann, que en este caso son

$$D_x \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} = D_y O = O$$

$$D_y \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} = - D_x O = O$$

de cuyas condiciones se deduce

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} = C ,$$

siendo C una constante real no negativa.

Las funciones complejas, no necesariamente analíticas, definidas en un dominio abierto del plano complejo, cuyo módulo es función analítica, son las funciones de módulo constante. Observemos, a diferencia de las funciones reales, que una función compleja puede no ser derivable, en sentido complejo, mientras su función módulo es una función derivable en sentido complejo.

Hallemos ahora la expresión general de las funciones complejas, en términos de sus componentes reales, cuyo módulo es función analítica. Las funciones reales componentes de tales funciones han de satisfacer la ecuación

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) = C^2$$

de esta ecuación se desprende que las funciones reales u, v son de la forma

$$u(x, y) = C \cos t$$

$$v(x, y) = C \operatorname{sen} t$$

donde $t = t(x, y)$ es una función real arbitraria, que ni siquiera es preciso suponer sea derivable, en sentido real. Así, pues, las funciones complejas, cuyo módulo es función analítica, son de la forma general

$$f(z) = C \cos t(x, y) + i . C \operatorname{sen} t(x, y)$$

donde $t(x, y)$ es una función real arbitraria, en las variables reales independientes x, y. Geométricamente, estas funciones aplican el dominio de definición en la circunferencia de radio C, y centro O.

Sea ahora $f(z)$ una función compleja analítica, y veamos cuándo esta función es tal que su módulo sea función analítica. En primer lugar, y a diferencia de las funciones reales, la función compleja $f(z)$ no es, sin más, analítica en su módulo.

Además tiene que satisfacer su módulo las condiciones de Cauchy-

Riemann, es decir, en términos de sus funciones reales componentes $u(x, y)$, $v(x, y)$

$$D_x \, |f(z)| = \frac{2u \, u_x + 2 \, v \, v_x}{2 \sqrt{u^2 + v^2}} = 0$$

$$D_y \, |f(z)| = \frac{2 \, u \, u_y + 2 \, v \, v_y}{2 \sqrt{u^2 + v^2}} = 0$$

sistema este equivalente a

$$\begin{aligned} u \, u_x + v \, v_x &= 0 \\ u \, u_y + v \, v_y &= 0 \, . \end{aligned} \qquad [8]$$

La función $f(z) = u(x, y) + i. \, v(x, y)$ es analítica, por hipótesis, por lo cual satisface las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= - v_x \end{aligned} \qquad [9]$$

llevadas estas condiciones al sistema [8[, se convierte en el sistema equivalente

$$u \, u_x - v \, u_y = 0$$

$$v \, u_x + u \, u_y = 0$$

el presente sistema es lineal y homogéneo en u_x, u_y y el determinante de los coeficientes es

$$u^2 + v^2$$

en general no nulo; y como el sistema ha de satisfacerse idénticamente para todos los pares de valores x, y del dominio de definición, se concluye

$$u_x = u_y = 0 \text{ , idénticamente}$$

volviendo a las condiciones de Cauchy-Riemann [9] de la función $f(z)$, se tiene

$$v_x = v_y = 0$$

y, por tanto, las funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$ son constantes.

De modo que, en definitiva, las funciones analíticas $f(z)$ de módulo también función analítica son de la forma general

$$f(z) = a + i. \, b$$

donde a, b son constantes reales. Se trata, en tal caso, de funciones complejas constantes.