GRUPOS DE MOVIMIENTOS DE LOS POLIEDROS REGULARES

por

E. P. CARRANZA

Generalidades.—Según EUCLIDES, el conocimiento y estudio de los poliedros regulares fueron obra de los creadores de la Escuela Pitagórica.

Ello explica el apelativo de *pitagóricos* que se ha dado a esos poliedros.

Pero algún historiador moderno, como HEIBERG, afirma que, en realidad, los primeros pitagóricos descubrieron —por decirlo así— tan solo el tetraedro, el exaedro y el dodecaedro regulares. Según dicho historiador, los otros dos poliedros regulares fueron realmente ideados por TEETETO, el discípulo de SOCRATES.

En un Diálogo de PLATON se afirma que:
«el fuego está formado con tetraedros, el aire con octaedros, el agua de «icosaedros y la tierra de cubos. Dios ha utilizado el dodecaedro penta«gonal para que sirva de límite al mundo».

Tan extraña explicación de la constitución de los llamados antiguamente *elementos* por cuerpos geométricos —muy a la manera platónica— permite ver que en la famosa Academia ateniense se entretenían ya en el estudio de los poliedros regulares.

Y así aparece justificado el nombre de *platónicos* que los matemáticos alemanes dan a esos cuerpos.

Parece innecesario indicar la construcción y las propiedades de los poliedros regulares que pueden estudiarse en las conocidas Geometrías de ROUCHÉ, THIEME, PUIG ADAM, etc.

Pero sí conviene registrar los números de elementos de dichos poliedros regulares en el siguiente cuadro, en que se señalan para cada uno de ellos por:

c, el número de caras;
v, » vértices;
a, » aristas;
n, número de aristas de cada cara;
m, » » » concurrentes en cada vértice.

Nombres	*c*	*n*	*v*	*m*	*a*
Tetraedro regular	4	3	4	3	6
Exaedro »	6	4	8	3	12
Octaedro »	8	3	6	4	12
Dodecaedro »	12	5	20	3	30
Icosaedro »	20	3	12	5	30

A la vista de este cuadro es comprensible la reciprocidad existente entre los siguientes pares:

del tetraedro regular consigo mismo;
del exaedro y del octaedro regulares;
del dodecaedro y del icosaedro regulares.

Las generalidades expuestas permiten ya abordar una cuestión que ni siquiera es mencionada en aquellas Geometrías, aunque sí aparece esbozada en la excelente Geometría de HADAMARD.

Movimientos que aplican un poliedro regular sobre sí mismo.—Como antecedente de esta cuestión recordemos esta propiedad:

Todo poliedro regular es inscriptible en una superficie esférica que contiene a los vértices de aquél.

De esta propiedad se deduce inmediatamente que todo movimiento que aplique un poliedro regular sobre sí mismo transformará a aquella esfera circunscrita al poliedro en sí misma; por tanto, su centro será un punto doble en aquel movimiento.

Ahora bien: los distintos movimientos son:

la *identidad*;
los *giros* en torno de rectas;
las *traslaciones*;
los *movimientos helicoidales* en general.

De ellos, tan sólo los dos primeros admiten puntos dobles.

Y si suponemos que la identidad I es un giro de amplitud nula en torno de cualquier recta tomada como eje, podremos afirmar:

Los movimientos que aplican un poliedro regular sobre sí mismo son giros en torno de rectas axiales que pasan por el centro de aquél.

Consideremos el conjunto G de todos los movimientos indicados.

Sean g y g' dos elementos de G, es decir, dos giros en torno de ejes respectivos e y e' y amplitudes α y α'.

Por el punto O de intersección de e y e' tracemos la recta r perpendicular al plano e e'.

En el plano que pasando por O es perpendicular a e tracemos la recta a, que con la r determina el ángulo $-\alpha : 2$.

Igualmente, en el plano que pasa por O y es perpendicular a e' tracemos la recta b, que con la r determina el ángulo $\beta : 2$.

Designemos por

S , la simetría de eje a;
S' , la simetría de eje r;
S'', la simetría de eje b.

Se tiene, según propiedad bien conocida:

$$g = S \times S'$$

$$g' = S' \times S''$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} g \times g' &= (S \times S') \times (S' \times S'') \\ &= S \times (S' \times S') \times S'' \\ &= S \times I \times S'' \\ &= S \times S'' \end{aligned}$$

Es decir:

$g \times g'$ es un giro; su eje es la perpendicular trazada por O al plano ab y su amplitud es el duplo de la del giro que transforma a en b.

Resulta, pues, que el conjunto G es *cerrado* respecto de la operación producto. Y puesto que los giros que lo integran *conservan algo*, puede anticiparse que

$\{G ; \times\}$ es *grupo*.

Demostrémoslo, probando que se cumplen las tres propiedades fundamentales de esa estructura.

1.ª *Asociativa.*

Esto es:

$$(g \times g') \times g'' = g \times (g' \times g'')$$

En efecto, esta propiedad es general para todas las transformaciones geométricas.

2.ª *Existencia de elemento neutro.*

En efecto: siendo I la identidad es

$$g \times I = I \times g = g$$

3.ª *Existencia de elemento inverso.*

En efecto: a todo giro g de eje e y amplitud α (elemento de G) corresponde otro giro g' (también elemento de G), tal que

$$g \times g' = g' \times g = \mathrm{I}$$

Obtengamos el *orden* del grupo G.

Dado un poliedro regular y elegida en él una cara, puede coincidir ésta con todas las c caras del poliedro (incluida ella misma), estando situados los poliedros en ambas posiciones en un mismo semiespacio de los dos determinados por el plano de la cara común.

En cada una de esas c posiciones que toma el poliedro dado, cualquiera arista de la cara común puede hacerse coincidir con las n aristas de dicha cara.

Resultan así $c \times n$ aplicaciones distintas de un poliedro regular sobre sí mismo como el total de las posibles.

Pero siendo $c \times n$ el número de aristas de todas las caras, computadas dos veces, se tiene:

$$c \times n = 2\,a$$

Por lo tanto:

El grupo de movimientos G que aplican un poliedro regular sobre sí mismo es de orden igual al duplo del número de sus aristas.

A continuación particularizamos los grupos de los distintos poliedros regulares.

El grupo del tetraedro regular.

Siendo 6 el número de las aristas del tetraedro regular $A\ B\ C\ D$, dicho grupo del tetraedro tiene

$$2 \times 6 = 12 \quad \text{elementos}$$

Uno de éstos es la identidad I que deja fijos los cuatro vértices del tetraedro.

Podemos, pues, representarla por la sustitución idéntica escribiendo.

$$I = \begin{pmatrix} A\ B\ C\ D \\ A\ B\ C\ D \end{pmatrix}$$

Por otra parte, consideremos la recta que une el punto medio H de la arista AB y el L de la arista opuesta CD.

Esta recta HL es perpendicular a ambas aristas AB y CD en sus respectivos puntos medios, y es, por tanto, eje de una simetría que transforma los vertices.

$$A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ D$$

en los correspondientes

$$B\ ,\ A\ ,\ D\ ,\ C$$

Designemos por r tal simetría axial que origina otra sustitución entre los vértices del tetraedro.

Resulta, pues, análogamente a lo antes escrito

$$r = \begin{pmatrix} A\ B\ C\ D \\ B\ A\ D\ C \end{pmatrix}$$

Del mismo modo se obtiene la simetría s, cuyo eje es la recta MN, que une los puntos medios de las aristas AC y BD, así como la simetría t, cuyo eje es la recta PQ que une los puntos medios de las aristas opuestas AD y BC.

Escribiremos, por consiguiente:

$$s = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$$

Además de estas simetrías o giros de 180°, que son elementos de G, existen otras que se obtienen así:

Sea la recta AO que une el vértice A con el centro O del tetraedro.

Un giro de 120° en torno de dicha recta transforma a los vértices

$$A \quad B \quad C \quad D$$

en los respectivos

$$A \quad C \quad D \quad B$$

y es un elemento α_1 del grupo G.

Se tiene, por tanto:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & D & B \end{pmatrix}$$

Otro elemento de G es el giro α_2 de 240° en torno de dicho eje AO. Luego

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & B & C \end{pmatrix}$$

Análogamente resultan los giros β_1 y β_2 en torno del eje BO y de amplitudes respectivas de 120° y 240°.

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & D & A \end{pmatrix} \qquad \beta_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & A & C \end{pmatrix}$$

así como los γ_1 y γ_2 en torno del eje CO

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & C & A \end{pmatrix} \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & C & B \end{pmatrix}$$

y los δ_1 y δ_2 en torno del eje DO

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix} \qquad \delta_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & B & D \end{pmatrix}$$

Resulta así que el grupo del tetraedro es

$$G = \{I, r, s, t, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2\}$$

Obsérvese que G es isomorfo al grupo de las sustituciones pares con los cuatro elementos A, B, C y D.

Esa importante propiedad permite formar fácilmente la siguiente tabla operatoria del grupo G, operando con sustituciones mucho mejor que con giros.

TABLA DEL GRUPO DEL TETRAEDRO REGULAR

$\times$	I	r	s	t	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2	δ_1	δ_2
I	I	r	s	t	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2	δ_1	δ_2
r	r	I	t	s	δ_2	γ_2	δ_1	γ_1	β_2	α_2	β_1	α_1
s	s	t	I	r	β_2	δ_1	γ_2	α_1	δ_2	β_1	α_1	γ_1
t	t	s	r	I	γ_1	β_1	α_2	δ_2	α_1	δ_1	γ_2	β_2
α_1	α_1	γ_1	δ_2	β_2	α_2	I	s	γ_2	δ_1	t	r	β_1
α_2	α_2	δ_1	β_1	γ_2	I	α_1	δ_2	t	r	β_2	γ_1	s
β_1	β_1	γ_2	α_2	δ_1	t	γ_1	β_2	I	s	δ_2	α_1	r
β_2	β_2	δ_2	γ_1	α_1	δ_1	s	I	β_1	α_2	r	t	γ_2
γ_1	γ_1	α_1	β_2	δ_2	β_1	t	r	δ_1	γ_2	I	s	α_2
γ_2	γ_2	β_1	δ_1	α_2	r	δ_2	α_1	s	I	γ_1	β_2	t
δ_1	δ_1	α_2	γ_2	β_1	s	β_2	γ_1	r	t	α_1	δ_2	I
δ_2	δ_2	β_2	α_1	γ_1	γ_2	r	t	α_2	β_1	s	I	δ_1

Observando esta tabla se ve que existen los siguientes subgrupos de G, distintos de los formados por el elemento único I y por todos los de G:

$$G_0 = \{ I, r, s, t \}$$

$$G_1 = \{ I, \alpha_1, \alpha_2 \} \qquad G_2 = \{ I, \beta_1, \beta_2 \}$$

$$G_3 = \{ I, \gamma_1, \gamma_2 \} \qquad G_4 = \{ I, \delta_1, \delta_2 \}$$

Nótese también que G no es conmutativo, pero sí lo son esos cinco subgrupos.

El grupo del exaedro regular o cubo.—Como el cubo tiene 12 aristas, el grupo G del cubo consta de 24 giros que son sus elementos. Para determinar éstos, tendremos en cuenta lo siguiente:

1.º Sea una arista AB del cubo y M su punto medio. Siendo A' y B' los vértices diametralmente opuestos de los A y B, resulta que $A'B'$ es la arista opuesta de la AB; llamemos M' al punto medio de $A'B'$.

Fácilmente se ve que MM' es perpendicular a las aristas AB y $A'B'$ en sus puntos medios.

Consideremos otro par de vértices C y C' diametralmente opuestos del cubo.

Mediante una figura, muy fácil de dibujar por el lector. se ve que el cuadrilátero $C\ M\ C'\ M'$ es un rombo; luego sus diagonales CC' y MM' se bisecan perpendicularmente en el centro O del cubo.

Análogamente resulta que la diagonal DD' del cubo consta perpendicularmente a MM'; ambos segmentos, DD' y MM', pasan también por O.

De todo ello resulta, que la simetría axial de eje MM' transforma los vértices.

$$A \quad B \quad C \quad D \quad A' \quad B' \quad C' \quad D'$$

en los correspondientes

$$B \quad A \quad C' \quad D' \quad B' \quad A' \quad C \quad D$$

Es decir: dicha simetría axial aplica el cubo sobre si mismo.

Y es claro que teniendo el cubo 6 pares de aristas opuestas, el cubo admite 6 simetrías axiales análogas a la anteriormente indicada.

2.º La recta AA', que une un par de vértices opuestos del cubo, es un eje ternario de simetría de este cuerpo.

Pues siendo AB, AC y AD las tres aristas del cubo que salen del vértice A, dicha recta AA' pasa por el centro del triángulo equilátero BCD, lo que prueba que AA' determina ángulos iguales con esas aristas AB, AC y AD.

Con igual razonamiento se demuestra que dicha recta AA' determina ángulos iguales con las tres aristas concurrentes en el vértice A'.

Por lo tanto: el giro de 120º en torno de AA' hace corresponder a los vértices

$$A \quad B \quad C \quad D \quad A' \quad B' \quad C' \quad D'$$

los respectivos

$$A \quad C \quad D \quad B \quad A' \quad C' \quad D' \quad B'$$

Esto es: dicho giro aplica el cubo dado sobre sí mismo.

Igualmente se prueba que el giro de 240º en torno del eje AA' aplica el cubo sobre sí mismo.

Como existen en el cubo cuatro pares de vértices opuestos, análogos a los A y A' indicados, resulta que hay $4 \times 2 = 8$ giros, que son elementos del grupo G que estamos considerando.

3.º Las rectas que unen los centros de cada par de caras opuestas son evidentemente ejes cuaternarios de simetría.

El número de giros correspondientes es $3 \times 3 = 9$.

En conclusión:

El grupo del cubo consta de los siguientes movimientos:

La identidad I.

Los 6 giros de 180º en torno de las rectas que unen los puntos medios de los pares de aristas opuestas.

Los 4 giros de 120° y los 4 de 240° en torno de las rectas que unen los pares de vértices opuestos.

Los 3 giros de 90°, los 3 de 180° y los 3 de 270° en torno de las rectas que unen los centros de los pares de caras opuestas.

En total se tienen:

$$1 + 6 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3 = 24$$

La tabla de este grupo (análoga a la de multiplicar números naturales, expresados en el sistema de base 24) podría formarse a favor de la representación de los giros por sustituciones entre los vértices del cubo.

El grupo del octaedro regular.—Dado un octaedro regular consideremos la esfera tangente a sus caras. La polaridad respecto de ésta hace corresponder a aquel octaedro un cubo cuyas aristas son también tangentes a la esfera.

Puede demostrarse que todo movimiento que aplica el octaedro sobre sí mismo transforme también al cubo deducido de él en sí mismo.

Como la propiedad recíproca es cierta, se puede afirmar que el *grupo del octaedro* es el ya señalado para el cubo.

Es decir: está formado por
la identidad;
6 simetrías axiales;
4 simetrías de ejes ternarios que dan 8 giros;
3 simetrías de ejes cuaternarios que dan 9 giros.
En total: 24 movimientos.

El grupo del dodecaedro regular.—Siendo 30 el número de aristas de un dodecaedro regular, será 60 el número de giros que componen el grupo G del dodecaedro regular.

Para particularizarlos notaremos que:

1.° La recta que une el punto medio de cada arista con el punto medio de la arista opuesta es un eje binario de simetría.

2.° La recta que une cada vértice con su diametralmente opuesto es un eje ternario de simetría.

3.° La recta que une los centros de cada par de caras paralelas opuestas es un eje quinario de simetría.

Los giros que resultan, respectivamente, son:

$$15 \times 1 = 15$$
$$10 \times 2 = 20$$
$$6 \times 4 = 24$$

Uniendo a estos giros la identidad, resulta, para número total de ellos,

$$1 + 15 + 20 + 24 = 60$$

El grupo del icosaedro regular.—Análogamente a lo antes indicado, se ve que, dado un icosaedro regular, la polaridad respecto a la esfera inscrita en él, aplicada a dicho poliedro, le transforma en un dodecaedro regular, cuyos vértices son los centros de las caras del icosaedro.

De aquí resulta que el grupo G del dodecaedro es también el grupo del icosaedro deducido de él.

Este grupo del icosaedro fue estudiado por el gran matemático alemán KLEIN, que lo utilizó genialmente en la resolución de la ecuación de 5.º grado.