MECANISMOS QUE TRANSFORMAN MOVIMIENTOS SOBRE UNA SUPERFICIE EN MOVIMIENTOS PLANOS

UNA LECCION DE INICIACION A LA INVESTIGACION PARA ESTUDIANTES DE INGENIERIA (*)

Por

DARIO MARAVALL CASESNOVES

de la Real Academia de Ciencias

A mitad de curso, después de haber dedicado varias clases a la resolución de problemas, creo que estamos en condiciones de dar una que pudiéramos llamar de iniciación a la investigación mecánica, para Escuelas de Ingenieros. Todos los problemas son, en definitiva, una pequeña investigación, y algunos pueden llegar a constituir una gran investigación; incluso en un campo tan trillado como lo es el de la Mecánica Racional, creo que si nos dedicamos a buscar en él podemos encontrar algunas cosas que si no importantes, por lo menos son curiosas.

El problema que vamos a tratar de resolver es el de proyectar unos mecanismos que transformen el movimiento sobre una superficie en un movimiento plano, y vamos a ir resolviéndolo paso a paso, para que veamos cómo se va realizando una investigación. Este problema en toda su generalidad es muy difícil, y en la mayoría de los casos no se puede resolver, pero concretamente para dos superficies: el cono de revolución y el helicoide conoide recto (la escalera de caracol) si se puede resolver. El caso del cono de revolución tiene interés, porque hay muchos movimientos en Física que aunque tienen lugar libremente en el espacio, es como si tuvieran lugar sobre el cono de revolución, porque las condiciones físicas en que se desenvuelve el movimiento es como si se obligase al móvil a moverse sobre un cono de revolución, aunque éste materialmente no exista, tal es el caso del movimiento de cargas eléctricas en el campo de un polo magnético. Si resolvemos el problema que nos hemos

(*) Lección dada por el autor en el salón de actos de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Madrid, en febrero de 1968, con motivo de un homenaje.

propuesto podemos, por medios puramente mecánicos, desenvolver un movimiento plano que sea equivalente al movimiento sobre el cono de revolución; hemos de encontrar, pues, un mecanismo plano cuya semifuerza viva sea igual a la del movimiento de un punto material sobre un cono de revolución. En coordenadas cartesianas la semifuerza viva de un punto material de masa m vale:

$$T = \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) \qquad [1]$$

y en coordenadas esféricas:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi; \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi; \quad z = r \cos \theta \qquad [2]$$

vale:

$$T = \frac{m}{2} (r'^2 + r^2 \theta'^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, \varphi'^2) \qquad [3]$$

si el punto se mueve sobre un cono de revolución de semiángulo en el vértice α, si tomamos el eje OZ coincidiendo con el eje del cono y el origen O coincidiendo con el vértice del cono, se tiene que $\theta = \alpha$ (constante). luego [3] se escribe:

$$T = \frac{m}{2} (r'^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \, \varphi'^2) \qquad [4]$$

Si un punto material P de masa m_1 se mueve sobre un plano, su semifuerza viva en coordenadas polares planas:

$$x = r \cos \varphi; \qquad y = r \operatorname{sen} \varphi \qquad [5]$$

vale:

$$T = \frac{m_1}{2} (x'^2 + y'^2) = \frac{m_1}{2} (r'^2 + r^2 \varphi'^2) \qquad [6]$$

que comparada con la [4] muestra la ausencia del factor $\operatorname{sen}^2 \alpha$ en φ'^2. Por tanto es necesario agregar algo en el movimiento plano que modifique la semifuerza viva (6), de modo que la transforme en una expresión equivalente a la [4]. Para ello (Fig. 1) unamos el punto P a un punto Q de masa m_2, mediante un hilo flexible e inextensible, que pasa a través del plano horizontal sobre el que se mueve P, por un orificio fino O, y mediante una polea infinitesimal (al decir infinitesimal decimos que no existe rozamiento) cuelga verticalmente. En la figura 1 la parte superior es la proyección horizontal sobre el plano del movimiento, y la parte inferior a OX la proyección vertical. La semifuerza viva del sistema formado por los dos puntos materiales, P y Q, vale:

$$T = \frac{m_1}{2} (r'^2 + r^2 \varphi'^2) + \frac{m_2}{2} z'^2 \qquad [7]$$

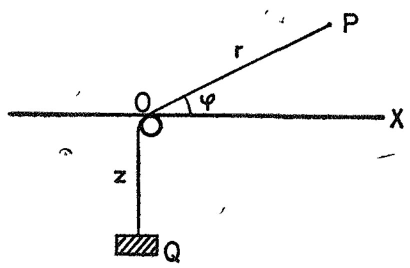

Fig. 1

siendo z la cota del punto Q, como:

$$z + r = l \qquad [8]$$

siendo la longitud constante del hilo, de [8] se sigue que:

$$z' = -r' \qquad [9]$$

y la [7] se escribe:

$$T = \frac{m_1}{2}(r'^2 + r^2 \varphi'^2) + \frac{m^2}{2} r'^2 =$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{2}\left(r'^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} r^2 \varphi'^2\right) \qquad [10]$$

expresión equivalente a la [4] con sólo hacer:

$$m_1 + m_2 = m; \qquad \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \operatorname{sen}^2 \alpha \qquad [11]$$

Ahora bien, si de una parte hemos resuelto parcialmente el problema en cuanto se refiere a la obtención de dos semifuerzas vivas equivalentes, para el movimiento de un punto material sobre un cono de revolución, y del sistema de dos puntos materiales en el movimiento plano, por otra parte hemos introducido una perturbación, debida a que en el caso del sistema se ha introducido un potencial perturbador, que es el de la acción de la gravedad sobre Q, el cual vale:

$$U = -m_2 gz \qquad [12]$$

Para completar la solución del problema es preciso anular la acción de este potencial gravitatorio perturbador. La forma más sencilla de destruir un potencial gravitatorio nos la sugiere el método seguido por Millikan para medir la carga del electrón, que aún hoy sigue siendo experimento modelo en cuanto a elegancia, habilidad e ingenio. Un campo gravitatorio se puede destruir introduciendo un campo eléctrico de la misma intensidad y de sentido contrario. En este caso particular, si al punto Q le dotamos de una carga eléctrica e y le sometemos a la acción de un campo eléctrico de sentido contrario al de la gravedad y de intensidad E, tal que:

$$e\,E = m_2\,g \qquad [13]$$

queda automáticamente destruido el potencial gravitatorio perturbador [12], y diseñado así un mecanismo plano, cuyos movimientos son equivalentes a los de un punto material obligado a moverse sobre un cono de revolución.

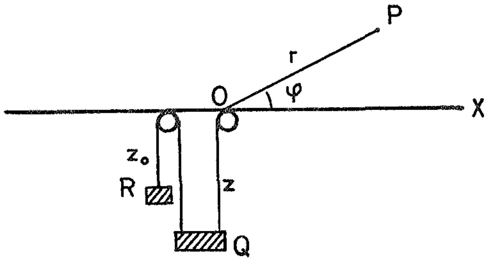

Fig. 2

Pero si se desea resolver este problema sin necesidad de recurrir a la electricidad, únicamente por medios puramente mecánicos, el problema también es posible (Fig. 2), para ello unamos el punto Q, por medio de un hilo flexible e inextensible a otro punto R de la misma masa m_2, de modo que el hilo pase por una polea infinitesimal; como en este caso si llamamos z_0 a la cota de R es:

$$z_0 + z = Cte; \qquad z'_0 = -z' \qquad [14]$$

y se han introducido los dos potenciales gravitatorios perturbadores debidos a Q y R, que son el [12] y el correspondiente a R:

$$-\,m_2\,g\,z_0 \qquad [14a]$$

cuya suma es constante:

$$-\,m_2\,gz - m_2\,g\,z_0 = \mathrm{Cte} \qquad [15]$$

el campo a él debido es nulo. Hemos destruido de este modo la acción perturbadora de la gravedad, por compensación de dos potenciales gravitatorios, pero ahora la semifuerza viva del sistema de los tres puntos materiales no es la [10], sino por [8] y [14] es:

$$\frac{m_1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2) + \frac{m_2}{2}z'^2 + \frac{m_2}{2}z'^2_0 =$$

$$= \frac{m_1 + 2m_2}{2}\left(r'^2 + \frac{m_1}{m_1 + 2m_2}\,r^2\varphi'^2\right) \qquad [16]$$

que es equivalente a la [4] con sólo hacer:

$$m_1 + 2m_2 = m; \qquad \frac{m_1}{m_1 + 2m_2} = \operatorname{sen}^2 \alpha \qquad [17]$$

de esta forma hemos proyectado un mecanismo plano (Fig. 2) que transforma el movimiento de un punto material sobre un cono de revolución en un movimiento plano. Por ejemplo, si el punto P descansa sobre una hoja de papel por medio de una punta de lápiz, y se le comunica una velocidad inicial, se dibujan sobre el papel las proyecciones horizontales de las geodésicas de un cono de revolución de eje vertical (trayectorias de un punto sobre el dicho cono, cuando no actua sobre él ninguna fuerza exterior).

La solución del problema para el helicoide conoide recto es más sencilla si tomamos como eje OZ al del helicoide, sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = r \cos \varphi; \qquad y = r \operatorname{sen} \varphi; \qquad z = a\, \varphi \qquad [18]$$

en las que x, y, z son las cartesianas, r, φ, z, las cilíndricas (cartesiana z y polares planas r, φ). Se sigue que la semifuerza viva de un punto material de masa m que se mueve sobre el helicoide vale:

$$T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{m}{2}[r'^2 + (r^2 + a^2)\varphi'^2] \qquad [19]$$

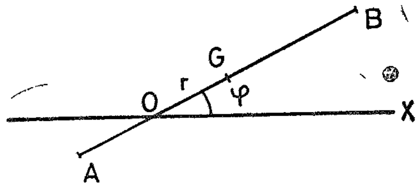

Fig. 3

Si ahora obligamos a una varilla, AB (Fig. 3), a moverse sobre un plano horizontal de modo que pase constantemente por un punto fijo O (podemos suponer la varilla muy larga, para que no abandone el punto O, porque si se produce tal abandono, pasa a moverse libremente sobre el plano), su semifuerza viva es:

$$T = \frac{M}{2}(r'^2 + r^2 \varphi'^2) + \frac{I}{2}\varphi'^2 \qquad [20]$$

en la que el primer sumando es la semifuerza viva del c. d. g. (punto medio o centro de gravedad G de la varilla), dotado de la masa total M de la varilla, y el segundo la semifuerza viva de la varilla en su movimiento alrededor del c. d. g. (teorema de Konig), siendo r, φ, las coordenadas polares del c. d. g. e I el momento de inercia de la varilla respecto a su punto medio, si introducimos el radio de giro k como es:

$$I = M\, k^2 \qquad [21]$$

la (20) se escribe:

$$T = \frac{M}{2} [r'^2 + (r^2 + k^2) \varphi'^2] \qquad [22]$$

que es equivalente a la [19] con sólo hacer:

$$m = M; \qquad a = k \qquad [23]$$

y como no se ha introducido ningún potencial perturbador, queda así proyectado un mecanismo plano que transforma los movimientos de un punto material sobre el helicoide conoide recto en movimientos planos. Igual que en el caso anterior del cono, si la varilla descansa sobre una hoja de papel apoyada sobre puntas de lápiz, si se le comunica una velocidad inicial cualesquiera, se dibujan sobre el papel las proyecciones horizontales de las geodésicas de un helicoide conoide recto, de eje vertical.

Observamos como dos movimientos aparentemente tan dispares, como lo son el de un punto material sobre un cono de revolución (o sobre un helicoide conoide recto) y el de un sistema material en un mecanismo plano, matemáticamente son equivalentes, de modo que si a ingenieros que mantuviésemos incomunicados entre sí, y que desconociesen la materialización física o mecánica del movimiento, les propusiésemos problemas homólogos de una y otra realidad física, llegarían a las mismas fórmulas matemáticas. Para ellos, aislados del mundo real, uno y otro problemas les parecerían el mismo, mientras que quien tuviera una mayor información podría apercibirse de que se trata de problemas matemáticamente equivalentes, pero trascendentemente distintos. Observamos también cómo cosas aparentemente muy alejadas entre sí pueden estar íntimamente relacionadas.

Si traducimos al español, mediante un barbarismo la palabra que italianos y franceses emplean para designar la investigación, vemos como aún en un campo tan trillado como lo es el de la Mecánica Racional, rebuscando en él, es posible encontrar cosas, que aunque no sean importantes, sean curiosas y aparentemente paradojicas.

BIBLIOGRAFIA

Para los detalles matemáticos y físicos, véanse los libros del autor editados por Dossat:

Mecánica y Cálculo Tensorial.
Problemas de Mecánica (dos tomos).
Ingeniería de las Oscilaciones.
Ecuaciones Diferenciales.
Física Matemática.

Y en relación con los aspectos filosóficos:

Filosofía de las Matemáticas.
Teoría de la Investigación Matemática.