ANALISIS DE LAS COLINEACIONES DEL PLANO COMPLEJO

Por

JESUS GOMEZ SANCHEZ

Una colineación en el plano es una aplicación (no necesariamente biyectiva) que conserva la alineación de puntos.

Para obtener su ecuación compleja podemos describir la aplicación como la inducida sobre un plano puntual por una aplicación lineal del espacio euclideano vectorial y tri-dimensional.

Tomemos el origen común de vectores fuera del plano en cuestión y la distancia a éste como unidad de medida. Los ejes en el plano complejo y dos de los ejes del espacio, paralelos, del mismo sentido y ortogonales; también perpendiculares a la recta perpendicular al plano por el origen del espacio, recta que dotada de sentido tomaremos como el tercer eje del espacio.

Las ecuaciones del punto proyectado del rayo, de dirección $X = \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3$, sobre el plano, son pues

$$\xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3 = X \longrightarrow \frac{\xi + i\eta}{\zeta} = z\,,$$

siendo e_1, e_2, e_3 la base del espacio; 1, i la del plano complejo.

Sea φ una aplicación lineal del espacio vectorial, determinada por las imágenes f_1, f_2, f_3 de los vectores base e_1, e_2, e_3, respectivamente. Sean

$$f_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3,\ f_2 = a_{21}e_1 + \\ + a_{22}e_2 + a_{23}e_3,\ f_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3$$

por tanto

$$\varphi : X = \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3 \longrightarrow X'$$

$$X' = (a_{11}\xi + a_{21}\eta + a_{31}\zeta)e_1 + (a_{12}\xi + a_{22}\eta + \\ + a_{32}\zeta)e_2 + (a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}\zeta)e_3$$

y las ecuaciones del punto proyectado, sobre el plano, del rayo cuyo vector direccional es X′, son pues,

$$X' \longrightarrow \frac{a_{11}\,\xi + a_{21}\,\eta + a_{31}\,\zeta}{a_{13}\,\xi + a_{23}\,\eta + a_{33}\,\zeta} + \frac{a_{12}\,\xi + a_{22}\,\eta + a_{32}\,\zeta}{a_{13}\,\xi + a_{23}\,\eta + a_{33}\,\zeta} \,.\, i = z'$$

y las ecuaciones de la colineación en el plano, inducidas por las ecuaciones de la aplicación lineal espacial.

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{\eta}{\zeta}\, i = z \longrightarrow \frac{a_{11}\,\xi + a_{21}\,\eta + a_{31}\,\zeta}{a_{13}\,\xi + a_{23}\,\eta + a_{33}\,\zeta} +$$

$$+ \frac{a_{12}\,\xi + a_{22}\,\eta + a_{32}\,\zeta}{a_{13}\,\xi + a_{23}\,\eta + a_{33}\,\zeta} \,.\, i = z'.$$

Para dar la expresión definitiva, en números complejos, se han de tener presente las relaciones.

$$\xi + \eta\, i = \zeta\, z \qquad 2\,\xi = \zeta\,(z + \bar{z})$$

$$\xi - \eta\, i = \zeta\, \bar{z} \quad ; \quad 2\, i\, \eta = \zeta\,(z - \bar{z})$$

por sustitución de ξ, η en términos de z, $\bar{z}$ las ecuaciones de la colineación adoptan la forma

$$z' = \frac{a_{11}(z+\bar{z})\zeta + a_{21}.i(\bar{z}-z)\zeta + 2a_{31}\zeta + ia_{12}(z+\bar{z})\zeta + a_{22}(z-\bar{z})\zeta + 2i.a_{32}\zeta}{a_{13}(z + \bar{z})\zeta + ia_{23}(\bar{z} - z)\zeta + 2a_{33}\zeta}$$

que liberada del factor común ζ, si $\zeta \neq 0$, da la expresión

$$z' = \frac{(a_{11} - i\, a_{21} + a_{22} + i\, a_{12})\, z + (a_{11} + i\, a_{21} - a_{22} + i\, a_{12})\, \bar{z} + 2(a_{31} + ia_{32})}{(a_{13} - i\, a_{23})z + (a_{13} + i\, a_{23})\bar{z} + 2\, a_{33}}$$

y, finalmente, la ecuación de las colineaciones, en el plano complejo, son ya

$$z' = \frac{\mathrm{A}\, z + \mathrm{B}\, \bar{z} + \mathrm{C}}{\bar{\mathrm{D}}\, z + \mathrm{D}\, \bar{z} + e}$$

donde A, B, C, D son constantes complejas; e constante real.

Este sería el punto de partida del estudio de las colineaciones complejas. Aún no ha sido establecida la existencia de aplicación inversa; por eso nos ha parecido conveniente indicarlo en la definición, para no excluir ninguna posibilidad.

Ahora dos consecuencias se presentan inmediatas: las Afinidades son particulares colineaciones cuando $\mathrm{D} = 0$. — Hay una recta de puntos propios, cuyas imágenes son puntos impropios, se trata de

$$\bar{\mathrm{D}}\, z + \mathrm{D}\, \bar{z} + e = 0\,,$$

pues e es real, y los coeficientes son conjugados (excepto en las Afinidades).

COLINEACIONES SINGULARES Y COLINEACIONES CON INVERSA

Trataremos a continuación de las colineaciones que admiten inversa, y previamente de la cuestión más general, de los puntos del plano complejo, cuya imagen por una colineación, es un punto dado. En otros términos, se desea saber cuáles son los puntos que verifican la ecuación en z.

$$\frac{A\,z + B\,\bar{z} + C}{\bar{D}\,z + D\,\bar{z} + e} = \alpha\,,$$

donde α es un punto dado; y escrita de modo más simple

$$(\bar{D}\,\alpha - A)\,z + (D\,\alpha - B)\,\bar{z} + e\,\alpha - C = 0$$

eliminando $\bar{z}$ entre esta ecuación y su conjugada

$$(\bar{D}\,\bar{\alpha} - \bar{B})\,z + (D\,\bar{\alpha} - \bar{A})\,\bar{z} + e\,\bar{\alpha} - \bar{C} = 0\,,$$

multiplicando la primera por $(D\,\bar{\alpha} - \bar{A})$, la segunda por $(D\,\alpha - B)$, se obtiene

$$\begin{aligned}&[A\,\bar{A} - B\,B + (\bar{B}\,D - \bar{A}\,\bar{D})\,\alpha + (B\,\bar{D} - A\,D)\,\bar{\alpha}]\,z = \\ &= (\bar{A}\,e - D\,\bar{C})\,\alpha + (C\,D - B\,e)\,\bar{\alpha} + B\,\bar{C} - \bar{A}\,C \qquad [1]\end{aligned}$$

la cual posee solución única para los puntos α que no anulan el coeficiente de z; pero aun los puntos α que verifican no idénticamente

$$A\,\bar{A} - B\,\bar{B} + (\bar{B}\,D - \bar{A}\,\bar{D})\,\alpha + (B\,\bar{D} - A\,D)\,\bar{\alpha} = 0$$

corresponden a los puntos de una recta propia que son imágenes de los puntos impropios, los cuales se reconocen algébricamente como los z/t con $z \neq 0$, $t = 0$. En general, por tanto, la aplicación inversa existe y es de la forma, tomando ya $\alpha = W$ variable:

$$z = \frac{(\bar{A}\,e - D\,\bar{C})\,w + (C\,D - B\,e)\,\bar{w} + B\,\bar{C} - \bar{A}\,C}{(\bar{B}\,D - \bar{A}\,\bar{D})\,w + (B\,\bar{D} - A\,D)\,\bar{w} + A\,\bar{A} - B\,\bar{B}}$$

los coeficientes de $\bar{w}$, w en el denominador son constantes complejas conjugadas, y el término independiente en el denominador es una constante real. Así, pues, la aplicación inversa (cuando existe) de una colineación también es otra colineación.

Cuando no hay aplicación inversa de una colineación es porque el coeficiente de z en [1] es idénticamente nulo, lo cual equivale a las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}A\,\bar{A} - B\,\bar{B} &= 0 \\ B\,\bar{D} - A\,D &= 0,\end{aligned} \qquad [2]$$

entonces los únicos puntos imágenes de la colineación son los que también anulen el segundo miembro de [1]:

$$B\,\bar{C} - \bar{A}\,C + (\bar{A}\,e - D\,\bar{C})\,\alpha + (C\,D - B\,e)\,\bar{\alpha} = 0$$

entonces haciendo

$$\frac{A}{\overline{D}} = \frac{B}{D} = \lambda \qquad \begin{array}{l} A = \lambda \, \overline{D} \\ B = \lambda \, D \end{array}$$

por sustitución en la ecuación en α, se tiene

$$(\overline{\lambda}\, D e - \overline{C}\, D)\, \alpha + (C\, D - \lambda\, D e)\, \overline{\alpha} + \lambda\, D\, \overline{C} - \overline{\lambda}\, D\, C = 0$$

$$(\overline{\lambda}\, e - \overline{C})\, \alpha + (C - \lambda\, e)\, \overline{\alpha} + \lambda\, \overline{C} - \overline{\lambda}\, C = 0$$

ésta es, como se ve directamente, la ecuación de una recta si $D \neq 0$.
Cuando $D = 0$, en la ecuación ahora reducida a

$$\overline{A}\, e\, \alpha - B\, e\, \overline{\alpha} + B\, \overline{C} - \overline{A}\, C = 0\,,$$

se verifica por el criterio de los coeficientes, que también es una recta:

$$\overline{(\overline{A}\, e)}\, (B\, \overline{C} - \overline{A}\, C) - (-\, B\, e)\, \overline{(B\, \overline{C} - \overline{A}\, C)} =$$

$$= e\, (A\, B\, \overline{C} - A\, \overline{A}\, C) + e\, (B\, \overline{B}\, C - A\, B\, \overline{C}) = e\, (B\, \overline{B} - A\, \overline{A})\, C = 0$$

Se puede establecer el hecho que las condiciones [2] significan que la colineación aplica todos los puntos del plano sobre una recta propia. Aun en el caso de que, con las condiciones [2], se presenten a la vez $D = e = 0$, también se puede decir que la imagen del plano por la correspondiente colineación está constituida por la recta de puntos impropios.

Se presenta otra situación muy particular, donde el coeficiente de [1] y el término independiente sean idénticamente nulos, es decir,

$$A\, \overline{A} - B\, \overline{B} = 0;\; B\, \overline{D} - A\, D = 0;\; B\, \overline{C} - \overline{A}\, C = 0;$$

$$A\, e - C\, \overline{D} = 0;\; C\, D - B\, e = 0$$

de donde

$$\frac{A}{\overline{D}} = \frac{B}{D} = \frac{C}{e} = w_0$$

y, por tanto, la colineación aplica todos los puntos del plano sobre un sólo punto, pues

$$W = \frac{A\, z + B\, \overline{z} + C}{\overline{D}\, z + D\, \overline{z} + e} = w_0$$

Las colineaciones que admiten inversa son denominadas no-singulares y son, pues, en virtud del precedente análisis, de la forma

$$W = \frac{A\, z + B\, \overline{z} + C}{\overline{D}\, z + D\, \overline{z} + e}\,,$$

con

$$B\, \overline{D} - A\, D \neq 0$$

$$D \neq 0,$$

o bien con

$$A\bar{A} - B\bar{B} \neq 0$$

$$D = 0$$

entre éstas se presentan, pues, correspondiendo a la segunda elección de condiciones, las afinidades.

La composición de dos colineaciones arbitrarias

$$W = \frac{Az + B\bar{z} + C}{\bar{D}z + D\bar{z} + e}, \quad W = \frac{A_1 z + B_1 \bar{z} + C_1}{\bar{D}_1 z + D_1 \bar{z} + e_1}$$

es la transformación

$$w = \frac{(A_1A + B_1\bar{B} + C_1\bar{D})\, z + (A_1B + B_1\bar{A} + C_1D)\, \bar{z} + A_1C + B_1\bar{C} + C_1e}{(\bar{D}_1A + D_1\bar{B} + e_1\bar{D})\, z + (\bar{D}_1B + D_1\bar{A} + e_1D)\, \bar{z} + \bar{D}_1C + D_1\bar{C} + e_1e}$$

la cual es también una colineación, porque en el denominador los coeficientes de z y $\bar{z}$ son complejos constantes conjugados; y el término independiente es real. Si nos limitamos solamente a las colineaciones no-singulares, como la inversa de una colineación no-singular, también es una colineación no-singular; y la colineación compuesta de dos colineaciones no-singulares es una colineación, que necesariamente admite inversa, podemos concluir:

El conjunto de las colineaciones del plano es cerrado respecto a la composición de aplicaciones; el subconjunto de las colineaciones no-singulares respecto a la composición, constituye un grupo, siendo subgrupo de éste el conjunto de las transformaciones afines.

Clasificación de las colineaciones: homologias

Los puntos invariantes de las colineaciones son puntos característicos, en el sentido que tales puntos nos dan criterios simples para clasificar las colineaciones. Los puntos en cuestión son los que verifican

$$\frac{Az + B\bar{z} + C}{\bar{D}z + D\bar{z} + e} = z\,;\; Az + B\bar{z} + C = (\bar{D}z + D\bar{z} + e)z$$

ahora bien, $\bar{D}z + D\bar{z} + e = t$ es real, cualquiera que sea z, por tanto la ecuación anterior se puede escribir en forma más sencilla

$$Az + B\bar{z} + C = tz\;,\; t \text{ real}$$

esta ecuación y su conjugada

$$\bar{A}\bar{z} + \bar{B}z + \bar{C} = t\bar{z}$$

nos permiten expresar z, $\bar{z}$ como soluciones del sistema

$$(t - A)\, z - B\bar{z} = C$$

$$-\bar{B}z + (t - \bar{A})\,\bar{z} = \bar{C}$$

en función de t, del modo siguiente

$$z = \begin{vmatrix} C & -B \\ \overline{C} & t-\overline{A} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t-A & -B \\ -\overline{B} & t-\overline{A} \end{vmatrix}$$

$$\overline{z} = \begin{vmatrix} t-A & C \\ -\overline{B} & \overline{C} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t-A & -B \\ -\overline{B} & t-\overline{A} \end{vmatrix}$$

y los valores de t se determinan por sustitución en la ecuación inicial

$$\overline{D} \begin{vmatrix} C & -B \\ \overline{C} & t-\overline{A} \end{vmatrix} + D \begin{vmatrix} t-A & C \\ -\overline{B} & \overline{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-A & -B \\ -\overline{B} & t-\overline{A} \end{vmatrix} (t-e) \qquad [3]$$

ecuación de tercer grado en t y coeficientes reales, porque tales coeficientes se presentan como la suma de constantes complejas conjugadas. Así, pues, una raíz, al menos, de tal ecuación, es real y toda colineación tiene al menos un punto invariante. Desde luego las únicas soluciones que nos importan son las reales.

Una vez conocidas las raíces reales t de la ecuación [3], para hallar los puntos invariantes no hay más que sustituir el valor de t en

$$z = \begin{vmatrix} C & -B \\ \overline{C} & t-\overline{A} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t-A & -B \\ -\overline{B} & t-\overline{A} \end{vmatrix}$$

dando para z un valor determinado, excepto cuando

$$\begin{vmatrix} t-A & -B \\ -\overline{B} & t-\overline{A} \end{vmatrix} = 0$$

Demorando momentáneamente el análisis de esta particularidad, las colineaciones se clasifican ,en concordancia con el número de raíces reales de la ecuación [3], en los siguientes tipos, todos ellos con la condición

$$\begin{vmatrix} t-A & -B \\ -\overline{B} & t-\overline{A} \end{vmatrix} \neq 0,$$

I TIPO, con tres únicos puntos invariantes distintos, correspondiente a la existencia de tres raíces reales distintas.

II TIPO, con dos únicos puntos invariantes distintos, corresponde a dos raíces reales, una simple y otra doble.

III TIPO, con un sólo punto invariante, corresponde a una sola raíz real.

En cuanto a la excepción, donde ya no queda determinado el punto invariante por el valor de la raíz real, debemos recurrir directamente a las ecuaciones de puntos invariantes, correspondientes a la raíz t de [3], ir,

$$Az + B\overline{z} + C = tz \qquad (A-t)\,z + B\overline{z} + C = 0$$

$$\overline{D}z + D\overline{z} + e = t \qquad \overline{D}z + D\overline{z} + e - t = 0$$

Si existe más de una solución o bien ninguna, para este sistema, es porque se verifica

$$\frac{A - t}{\bar{D}} = \frac{B}{D}$$

si además se tiene

$$\frac{A - t}{\bar{D}} = \frac{B}{D} \neq \frac{C}{e - t}$$

el sistema no tiene ninguna solución.

En el caso de ser

$$\frac{A - t}{\bar{D}} = \frac{B}{D} = \frac{C}{e - t}$$

existe una recta de puntos invariantes, y no sólo se puede hallar el valor de t, sino que se halla una relación característica entre los coeficientes de la función colineación cuando se da esta situación particular, conocida con la denominación de Homología. La relación en cuestión es, pues,

$$A - \frac{B\,\bar{D}}{D} = e - \frac{C\,D}{B} = t\,.$$

En el caso particular, $D = O$, recaemos en las afinidades, siendo las Homologías afines caracterizadas como

$$(\bar{A} - e)\,C = B\bar{C}\ (\text{si } C \neq O),\ \text{o bien}\ |\,A - e\,| = |\,B|\ (\text{si } C = O).$$

Examinemos el caso particular de colineaciones cuando $C = O$, lo cual significa que uno de sus puntos invariantes es $z = O$; la caracterización presente de Homologías es

$$\frac{A - e}{\bar{D}} = \frac{B}{D}\,,\ \text{o bien, } B = O,\ e \text{ arbitrario.}$$

Las rectas de puntos dobles, llamadas Ejes de Homología, son, respectivamente,

$$\frac{B\,\bar{D}}{D}\,z + B\,\bar{z} + C = O;\ (A - e)\,z + B\bar{z} + C = O;$$

$$(A - e)\,z + B\,\bar{z} = O;\ \bar{D}z + D\,\bar{z} + e - A = O$$

Además del eje de Homología existe un punto invariante, llamado Centro de Homología, generalmente exterior al Eje, pero a veces inciden y la colineación se llama Homología Especial. El tercer caso anterior es Homología Especial.

Cuando se presenta Homología, además existe otro punto invariante, que vamos a determinar por medio de las siguientes relaciones.

$$Az + B\bar{z} + C = tz \qquad (A - t)\, z + B\bar{z} + C = O$$

$$\bar{D}z + D\bar{z} + e = t \qquad \bar{D}z + D\bar{z} + e - t = O$$

eliminando $\bar{z}$ se tiene

$$(AD - B\bar{D} - Dt)\, z = Be - CD - Bt$$

y llamando

$$t_o = A - \frac{B\,\bar{D}}{D} = e - \frac{C\,D}{B}$$

al valor t correspondiente al eje, la ecuación de más arriba puede escribirse

$$D\,(t_o - t)\, z = B\,(t_o - t)$$

por tanto esta ecuación se escinde en otras dos posibles

$$t_o - t = O, \text{ o bien, } Dz = B\,.$$

La primera indica que t_o se vuelve otra vez a presentar como raíz de [3]; la segunda da el centro de Homología. De modo que raíz correspondiente al eje de Homología es raíz doble de la ecuación de tercer grado que da las raíces correspondientes a los puntos dobles. El centro de homología es el punto

$$z_1 = \frac{B}{D}\,,$$

el cual es impropio en las afinidades homológicas, pues allí $D = O$. El valor de t, correspondiente al centro de homogía es, pues, la solución t de la ecuación

$$(A - t)\,\frac{B}{D} + B\,\frac{\bar{B}}{\bar{D}} + C = O\,.$$

Si la homogía fuera especial se verificará entonces

$$(A - t_o)\,\frac{B}{D} + B\,\frac{\bar{B}}{\bar{D}} + C = O\,.$$

Restando m embro a miembro las dos últimas ecuaciones, se tiene

$$(t - t_o)\,\frac{B}{D} = O$$

de donde

$$t = t_o\,(\text{si } B \neq O)$$

lo cual nos dice que una Homología Especial, en su ecuación característica de raíces reales t, todas ellas son reales e iguales, es decir, t es raíz triple. El caso con $B = O$, se resuelve con más facilidad, pues también $C = O$ y el centro de Homología es el origen.