UN CRITERIO DE NORMABILIDAD

Por

FERNANDO BOMBAL GORDÓN

Se sabe que toda aplicación lineal continua entre dos espacios vectoriales topológicos es uniformemente continua y, en el caso de espacios normados, lipschitziana. En particular, en un espacio normado la homotecia $x \to \lambda x$ admite como constante de Lipschitz el número $|\lambda|$. El objeto de esta nota es ver que en el caso de espacios localmente convexos metrizables, la existencia de una homotecia que sea contractiva implica que el espacio sea normable.

En lo que sigue consideraremos espacios vectoriales topológicos localmente convexos y metrizables sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, que será siempre el de los reales, $\mathbf{R}$, o el de los complejos, $\mathbf{C}$. En un espacio de este tipo, existe siempre una métrica respecto a la cual todas las homotecias son lipschitzianas. En efecto, una condición necesaria y suficiente para que un espacio localmente convexo separado, E, sea metrizable, es que exista una familia numerable de seminormas que definan su topología, y esta familia se puede considerar siempre creciente. Entonces, si $\{q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es una familia numerable creciente de seminormas que definen la topología de E, la función $x \to |x|$ de E en $\mathbf{R}^+$ dada por

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \frac{q_n(x)}{1 + q_n(x)}$$

tiene las propiedades:

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
b) $|x| = |-x|.$
c) $|x + y| \leqslant |x| + |y|.$
d) $|\lambda| \leqslant 1 \Rightarrow |\lambda x| \leqslant |x|.$
e) $\lambda \to 0 \Rightarrow |\lambda x| \to 0, \forall x \in E.$

Además, si definimos $\delta(x, y) = |x - y|$, resulta que δ es una distancia invariante por traslaciones que define en E la topología inicial ([1], Prop. 2, pág. 114). Respecto a esta métrica, todas las homotecias son lipschitzianas, pues si $\lambda \in \mathbf{K}$ y $|\lambda| \leqslant 1$, (*d*) prueba que $|\lambda x| \leqslant |x|$

$\forall x \in E$, y por tanto $x \rightarrow \lambda x$ es lipschitziana, admitiendo a 1 como constante de Lipschitz. Si $|\lambda| > 1$,

$$|\lambda x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{q_n(\lambda x)}{1 + q_n(\lambda x)} =$$

$$= |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{q_n(x)}{1 + |\lambda|\, q_n(x)} \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{q_n(x)}{1 + q_n(x)} = |\lambda| \; |x|$$

lo que prueba que $x \rightarrow \lambda x$ es lipschitziana, admitiendo a $|\lambda|$ como constante de Lipschitz. Antes de dar la anunciada caracterización de los espacios normables, necesitaremos algunas definiciones.

Definición 1.—Sea E un *e . v* . sobre **K**, A y B dos subconjuntos de E. Diremos que A *absorbe* a B si existe un $\alpha > 0$, tal que $B \subset \lambda A$ para todo $\lambda \in \mathbf{K}$ tal que $|\lambda| \geqslant \alpha$.

Notemos que si A es equilibrado, A absorbe a B si $\exists\, \mu \in \mathbf{K}$, tal que $B \subset \mu A$. En efecto, si $|\lambda| \geqslant |\mu| \Longrightarrow |\lambda^{-1}\mu| \leqslant 1$ y, por tanto, $B \subset \mu A = \lambda\, (\lambda^{-1}\, \mu) A \subset \lambda\, A$.

Definición 2.—Un subconjunto B de un *e . v* . topológico es *acotado* si es absorbido por todo entorno del origen.

Desde luego, B es acotado si es absorbido por todo entorno que pertenezca a un sistema fundamental de entornos de O.

Se verifica la siguiente

Proposición.—Si E es un espacio localmente convexo separado, en el cual existe un entorno de 0 acotado, entonces E es normable ([1], Prop. 1, pág. 109).

Teorema.—Sea E un espacio localmente convexo metrizable sobre **K.** La condición necesaria y suficiente para que E sea normable es que exista un $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{K}$, tal que la aplicación $x \rightarrow \lambda x$ de E en E sea contractiva (respecto a una métrica cualquiera que defina la topología de E).

Demostración.—La condición es evidentemente necesaria. Veamos que es suficiente.

Sea d una métrica definiendo la topología de E respecto a la cual la aplicación $x \rightarrow \lambda x$ sea contractiva. Esto querrá decir que $\exists\, k \in \mathbf{R}$, $0 < k < 1$, tal que $d(\lambda x, \lambda y) \leqslant kd\,(x, y)$. En particular, si ponemos $|x| = d(x, 0)$, se tendrá $|\lambda x| \leqslant k\, |x|$. Designemos por B_r la bola de centro 0 y radio r y sea $\{V_i\}_{i \in I}$ un sistema fundamental de entornos de 0 formado por conjuntos convexos, equilibrados y absorbentes. Vamos a probar que B_1 es un entorno acotado de 0. Como las bolas de centro el origen son también un sistema fundamental de entorno de 0, dado V_i existe $r < 0$ tal que $B_r \subset V_i$. Como $k<1$, $\exists$ $n \in N$, tal que $k^n < r$. Entonces, $| \lambda^n x | = | \lambda(\lambda^{n-1}x) | \leqslant k | \lambda^{n-1}x |$ y por inducción resulta $| \lambda^n x | \leqslant \leqslant k^n | x | < r | x |$. Es decir, si $x \in B_1$, $\lambda^n x \in B_r$, luego $\lambda^n B_1, \subset B_r \subset V_i$ y, por tanto, $B_1 \subset \lambda^{-n} V_i$. Como V_i es equilibrado, esto quiere decir que B_1 es absorbido por V_i, para cada $i \in I \Rightarrow B_1$ es un entorno de 0 acotado. Como E es separado por ser metrizable, en virtud de la proposición anterior, E es normable.

REFERENCIAS

[1] J. HORVÁTH.—*Topological Vector Spaces and Distributions.* Volume I. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.