GENERALIZACION DEL CONCEPTO DE EQUIPOLENCIA: DILATACIONES

Por

JUAN TORRES NOGUERA

Mediante una conveniente generalización del concepto elemental de equipolencia el estudio de las dilataciones adquiere la misma sencillez y claridad que en las traslaciones se obtiene por medio de vectores libres: Este es el objeto del presente trabajo. (Téngase presente el isomorfismo existente entre el grupo aditivo de los vectores libres y el grupo de traslaciones, tanto en el plano como en el espacio.)

EQUIPOLENCIA DE RAZON k

Dado un número real k, *distinto de cero,* que llamaremos razón de equipolencia, y considerando el espacio ordinario E (el plano π) como conjunto de puntos y vectores fijos del mismo, diremos que el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es *equipolente* del vector fijo $\overrightarrow{A'B'}$ *en razón* k (del espacio E o plano π todos ellos), siempre y cuando se cumpla condición

$$\left[\overrightarrow{BB'}\right] = k\left[\overrightarrow{AA'}\right] \ (^*)$$

Escribiremos entonces:

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'} \ (k)$$

En otros términos damos la

Definición.

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}\,(k) \iff \left[\overrightarrow{BB'}\right] = k\left[\overrightarrow{AA'}\right]$$

(*) En general indicaremos por $\left[\overrightarrow{AA'}\right]$, $\left[\overrightarrow{BB}\right]$, ... los vectores libres de representantes respectivos $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, . , ...

Relación de equivalencia.—Para cada razón k vamos a demostrar que dicha equipolencia es una relación de equivalencia. En efecto, para tres vectores fijos, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A''B''}$, cualesquiera del espacio E (plano π), se cumplen las propiedades:

a) *Reflexiva*:

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}\ (k).$$

Dem.:

$$\left[\overrightarrow{BB}\right] = k\left[\overrightarrow{AA}\right] \Leftrightarrow \vec{0} = k\ \vec{0}\ (\vec{0}\ \text{vector nulo})$$

b) *Simétrica*:

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}\ (k) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}\ (k)$$

Dem.:

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}\ (k) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{BB'}\right] = k\left[\overrightarrow{AA'}\right] \Rightarrow \left[\overrightarrow{B'B}\right] = k\left[\overrightarrow{A'A}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}\ (k)$$

c) *Transitiva*:

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}\ (k)\\ \overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{A''B''}\ (k)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A''B''}\ (k)$$

Dem.:

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}\ (k)\\ \overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{A''B''}\ (k)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\left[\overrightarrow{BB'}\right] = k\left[\overrightarrow{AA'}\right]\\ \left[\overrightarrow{B'B''}\right] = k\left[\overrightarrow{A'A''}\right]\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BB''}\right] = k\left[\overrightarrow{AA''}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A''B''}\ (k)$$

PARTICION EN CLASES DE EQUIVALENCIA: VECTOR LIBRE DE RAZON *k*

Cada clase de equivalencia en razón *k* está formada por los vectores fijos equipolentes en razón *k* a uno dado $\overrightarrow{AB}$, es decir, se identifica con el conjunto de vectores fijos

$$\left\{ \overrightarrow{XY} \mid \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\,(k) \right\}.$$

Representaremos dicha clase de equivalencia mediante uno cualquiera de sus vectores fijos y la razón *k*, así:

$$\left[\overrightarrow{AB}, k\right]$$

y la llamaremos *vector libre de razón* k.

Señalemos la posibilidad de representar el mismo vector libre

$$\left[\overrightarrow{AB}, k\right]$$

por otro vector fijo $\overrightarrow{OP}$ de origen arbitrario 0 (o bien de extremo arbitrario P). Bastará para ello tomar $\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{AB}\,(k)$, es decir,

$$\left[\overrightarrow{PB}\right] = k\left[\overrightarrow{OA}\right]$$

pero si fijamos O el punto P queda unívocamente determinado (lo mismo si fijamos arbitrariamente P quedará determinado el origen O).

ADICION DE VECTORES LIBRES DE RAZONES CUALESQUIERA: GRUPO QUE FORMAN

Definiremos la suma de dos vectores libres

$$\left[\overrightarrow{AB}, k_1\right] \text{ y } \left[\overrightarrow{BC}, k_2\right]$$

en donde el extremo B del vector fijo $\overrightarrow{AB}$ del primer sumando coincide con el origen B del segundo ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ consecutivos), como un vector libre

$$\left[\overrightarrow{AC}, k_1\, k_2\right]$$

de *razón* igual al producto de las razones de los sumandos y de *vector fijo* igual a la suma de los vectores fijos de los sumandos.

Es decir:

$$\left[\overrightarrow{AB},\, k_1\right] + \left[\overrightarrow{BC},\, k_2\right] = \left[\overrightarrow{AC},\, k_1\, k_2\right]$$

en donde se precisa que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean consecutivos (requisito siempre posible).

Propiedad uniforme.—Para que tenga sentido la operación definida no debe variar la suma al cambiar de representantes en los sumandos, es decir, debe ser válida la implicación

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}\,(k_1) \\ \overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{B'C'}\,(k_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}\,(k_1\, k_2)$$

Dem.:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}\,(k_1) \\ \overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{B'C'}\,(k_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left[\overrightarrow{BB'}\right] = k_1 \left[\overrightarrow{AA'}\right] \\ \left[\overrightarrow{CC'}\right] = k_2 \left[\overrightarrow{BB'}\right] \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{CC'}\right] = (k_1\, k_2) \left[\overrightarrow{AA'}\right] \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}\,(k_1\, k_2)$$

Propiedad asociativa:

$$\left(\left[\overrightarrow{AB},\, k_1\right] + \left[\overrightarrow{BC},\, k_2\right]\right) + \left[\overrightarrow{CD},\, k_3\right] =$$

$$= \left[\overrightarrow{AB},\, k_1\right] + \left(\left[\overrightarrow{BC},\, k_2\right] + \left[\overrightarrow{CD},\, k_3\right]\right)$$

Resulta inmediata.

Elemento neutro: El vector libre

$$\left[\overrightarrow{AA},\, 1\right]$$

de vector fijo nulo $\overrightarrow{AA}$ y razón 1 está formado por todos los vectores

$$\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AA}(1) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{YA}\right] = 1 \left[\overrightarrow{XA}\right] \Leftrightarrow Y = X,$$

es decir, todos los vectores fijos nulos. Dicho vector libre es el elemento neutro, es decir, para cualquier $\left[\overrightarrow{AB},\, k\right]$:

$$\left[\overrightarrow{AA},\, 1\right] + \left[\overrightarrow{AB},\, k\right] = \left[\overrightarrow{AB},\, k\right] + \left[\overrightarrow{BB},\, 1\right] = \left[\overrightarrow{AB},\, k\right]$$

Vectores opuestos.—Dos vectores libres

$$\left[\overrightarrow{AB}, k\right] \text{ y } \left[\overrightarrow{BA}, 1/k\right]$$

de vectores fijos opuestos y razones inversas son opuestos, es decir,

$$\left[\overrightarrow{AB}, k\right] + \left[\overrightarrow{BA}, 1/k\right] = \left[\overrightarrow{AA}, 1\right]$$

$$\left[\overrightarrow{BA}, 1/k\right] + \left[\overrightarrow{AB}, k\right] = \left[\overrightarrow{BB}, 1\right]$$

Grupo de vectores libres de razones cualesquiera

El conjunto de vectores libres de razón k cualquiera, tanto en el espacio como en el plano, forman grupo respecto de la adición en virtud de las propiedades demostradas (no conmutativo según veremos).

GENERALIZACION DEL CONCEPTO DE VECTOR

El concepto de vector libre de razón k es una generalización del concepto de vector libre ordinario.

En efecto, basta hacer $k = 1$ para tener

$$\left[\overrightarrow{AB}, 1\right] = \left[\overrightarrow{AB}\right], \text{ es decir, } \overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}(1) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$$

y para la adición se tiene

$$\left[\overrightarrow{AB}, 1\right] + \left[\overrightarrow{BC}, 1\right] = \left[\overrightarrow{AB}\right] + \left[\overrightarrow{BC}\right]$$

De otra manera: El conjunto de vectores libres de razón $k = 1$, con la adición arriba definida, forma grupo isomorfo con el grupo aditivo de los vectores libres del espacio E (plano π) y, por tanto, resulta conmutativo.

DILATACIONES (**)

Dilatación de vector libre

$$\left[\overrightarrow{AA'}, k\right]$$

de razón k es toda transformación geométrica en que cada punto P del espacio E (plano π) tiene como imagen un punto $P' \in E$ (o bien $P' \in \pi$), tal que

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AA'}(k)$$

(**) Llamamos dilatación a toda homotecia o traslación.

De otra manera: Dilatación de vector

$$\left[\overrightarrow{AA'}, k\right]$$

es toda aplicación D: A $\rightarrow$ A′ (o también A $\xrightarrow{D}$ A′) en que el origen P de cada vector fijo

$$\overrightarrow{PP'} \in \left[\overrightarrow{AA'}, k\right]$$

tiene como imagen el extremo P′ del mismo.

En dicha aplicación D cualquier $Q' \in E$ $(Q' \in \pi)$, es imagen de un punto $Q \in E$ $(Q \in \pi)$, y solamente uno, y, por tanto, resulta biyectiva.

Grupo de las dilataciones.—Designaremos toda dilatación de vector

$$\left[\overrightarrow{AA'}, k\right], \text{ así: } D\left[\overrightarrow{AA'}, k\right],$$

existiendo entre vectores libres generalizados y dilataciones la correspondencia biunívoca

$$\left[\overrightarrow{AA'}, k\right] \longleftrightarrow D\left[\overrightarrow{AA'}, k\right].$$

Ahora dadas las dilataciones

$$D_1 = D\left[\overrightarrow{AA'}, k_1\right] \text{ y } D_2 = D\left[\overrightarrow{A'A''}, k_2\right]$$

si aplicamos sucesivamente las dos a un punto genérico $M \in E$ $(M \in \pi)$, en el mismo orden dado, tendremos que el producto es la dilatación

$$D_1D_2 = D\left[\overrightarrow{AA''}, k_1k_2\right]$$

En otros términos:

$$D\left[\overrightarrow{AA'}, k_1\right] . D\left[\overrightarrow{A'A''}, k_2\right] = D\left(\left[\overrightarrow{AA'}, k_1\right] + \left[\overrightarrow{A'A''}, k_2\right]\right).$$

En consecuencia: el producto de dilataciones es asociativo, tiene como elemento neutro la dilatación de vector

$$\left[\overrightarrow{AA}, 1\right]$$

y las dilataciones de vectores opuestos

$$\left[\overrightarrow{AB}, k\right] \text{ y } \left[\overrightarrow{BA}, 1/k\right]$$

resultan inversas, es decir, el conjunto de las dilataciones respecto del producto de las mismas forma grupo.

Subgrupo de las traslaciones.—Está formado por las dilataciones de razón $k = 1$ y resulta conmutativo.

Subgrupo de las dilataciones isométricas.—Está formado por las dilataciones de razón $|k| = 1$. Si $k = 1$ la ditalación resulta traslación y si $k = -1$ simetría central.

Producto de simetrías centrales.—La simetría central es una transformación involutiva, es decir,

$$D\left[\overrightarrow{AB}, -1\right] = D\left[\overrightarrow{BA}, -1\right]$$

En efecto,

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{BA}(-1) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{BA}\right] = (-1)\left[\overrightarrow{AB}\right]$$

El producto de dos simetrías centrales diferentes, vamos a ver ahora, es una traslación, pero no resulta conmutativo.

Para ello tenemos:

$$D\left[\overrightarrow{AA'}, -1\right] . D\left[\overrightarrow{A'A''}, -1\right] = D\left[\overrightarrow{AA''}, 1\right]$$

$$D\left[\overrightarrow{A'A''}, -1\right] . D\left[\overrightarrow{AA'}, -1\right] =$$

$$= D\left[\overrightarrow{A''A'}, -1\right] . D\left[\overrightarrow{A'A}, -1\right] = D\left[\overrightarrow{A''A}, 1\right]$$

resultando dos traslaciones de vectores opuestos y, por tanto, el grupo de las dilataciones no es conmutativo.

Homotecias.—Son dilataciones

$$D\left[\overrightarrow{AA'}, k\right]$$

de razón $|k| \neq 1$. Si $|k| > 1$ son ampliaciones y si $|k| < 1$ se trata de reducciones.