# SÔBRE A DUALIDADE EM ESPAÇOS PROJETIVOS

Por

Jayme Machado Cardoso

Na geometria projetiva $n$—dimensional apresenta—se a bijeção (dualidade) que a cada subespaço de dimensão $p$ $(0 \leqslant p < n)$ faz corresponder um subespaço de dimensão $n - p - 1$. A dualidade no espaço projetivo S, de dimensão $n$, é, pois, a coleção de $(n + 1)/2$ bijeções entre os conjuntos $M_i$ dos subespaços de dimensão $p$ de S, e os conjuntos $M_i^*$ (ditos subespaços duais de $M_i$). Em particular, uma de tais bijeções é aquela que ao conjunto dos subespaços de dimensão $n - 1$ de S (denominado espaço dual $S^*$ de S) faz corresp onder o conjunto dos subespaços de dimensão zero de S (a saber, o próprio S).

Aqui se apresenta o problema de saber se não poderia haver bijeções, distintas da identidade, entre subespaços de dimensão $p$ e $q$, de um mesmo espaço projetivo S de dimensão $n$ (evidentemente maior que $p$ e $q$), para quaisquer números inteiros $p$ e $q$. A resposta é negativa para dimensões $p$ e $q$, tais que $p + q \neq n - 1$.

Com efeito, um subespaço de dimensão $p = n - r$ ($r$ inteiro compreendido entre $l$ e $n$) de S é determinado por $r = n - p$ subespaços de dimensão $n - l$. Como a equação de um subespaço de dimensão $n - l$ em S tem $n$ coeficientes, resulta que um subespaço de dimensão $p$ seria determinado por $(n - p)n$ coeficientes. Mas, por convenientes combinações lineares das equações é sempre possível obter subespaços «paralelos» aos eixos coordenados de S (ou seja, equações com alguns dos coeficientes, escolhidos arbitràriamente, iguais a zero), e, em consequência, tal número se reduz a $n \cdot r - r(r - l) = (n - p)(p + l)$.

Assim, o conjunto $V(p)$ dos subespaços de dimensão $p$ é um espaço de dimensão $(n - p)(p + l)$. Tudo se resume em achar um número $q < n$, tal que

$$(n - p)(p + l) = (n - q)(q + l),$$

isto é, tal que

$$(p - q)(n - 1 - p - q) = 0.$$

Tal condição é verificada apenas para $q = p$ e $q = n - p - l$.

Em conclusão: a única dualidade, diferente da identidade, que pode haver em um espaço projetivo é aquella que aos subespaços de dimensão $p$ faz corresponder subespaços de dimensão $n - p - l$.

(Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil.)