SOBRE LAS RELACIONES ENTRE CADENAS DE MARKOV Y SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Por

LEONCIO FERNÁNDEZ MAROTO

El objeto de este trabajo es examinar algunos aspectos de las relaciones existentes entre las cadenas de Markov y las ecuaciones en diferencias finitas. El tema ha sido tratado por Ornello Vitali [1], pero aquí se aborda desde un punto de vista diferente, ya que la relación se establece a partir de la consideración de sistemas de ecuaciones en diferencias, que expresan plenamente la naturaleza de dicha relación.

En efecto, como es sabido, una cadena finita de Markov de parámetro discreto y n estados queda representada y regida por las siguientes ecuaciones (*):

$$p_j(t+1) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \, . \, p_{ij} \qquad (j = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

En estas ecuaciones se supone $p_{ij} \geqslant 0$, y también que

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,$$

condiciones que deben cumplirse en virtud de la propia definición de la cadena considerada. Con notación matricial, tendremos:

$$[p(t+1)] = [p(t)]\,[\mathrm{T}] \tag{2}$$

expresión en la que $[p(t+1)]$ y $[p(t)]$ son vectores-fila estocásticos de

(*) Vid. e. g. «Mathematiques nouvelles», R. Faure et A. Kaufmann, Aide Mémoire Dunod, Tome II, 1964, pág. 123.

n componentes y T es una matriz estocástica o de Markov, cuyos elementos cumplen las condiciones:

$$p_{ij} \geqslant 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

propias de las probabilidades de transición de las cadenas finitas.

La simple observación de (1) pone de relieve que se trata de un sistema homogéneo de n ecuaciones en diferencias, de primer orden, cuyos coeficientes p_{ij} pueden depender del tiempo t, o no, según que la cadena sea estacionaria o no lo sea.

Se verifica, por tanto:

Aserto 1.—Toda cadena finita de Markov con parámetro discreto y n estados, estacionaria o no estacionaria, viene expresada por un sistema homogéneo de ecuaciones en diferencias finitas, de primer orden, que en notación matricial puede escribirse:

$$[p(t + 1)] = [p(t)] \, [T], \tag{2}$$

siendo $[p(t + 1)]$ y $[p(t)]$ vectores-fila estocásticos de n componentes y [T] la matriz de transición, que dependerá o no de t, según se trate de cadena estacionaria o no estacionaria. La cadena queda completamente definida si se da el vector $[p(0)]$ de probabilidades iniciales.

En el sistema (1) o (2) las incógnitas son las n funciones $p_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, o sea el vector-fila estocástico de n componentes $[p(t)]$. Resuelto el sistema, obtendremos, en función de t y de $[p(0)]$, expresiones $p_i(t)$ que nos darán, para cualquier valor de t, la probabilidad de que el sistema se halle en el estado i, al cumplirse el tiempo t.

Examinemos ahora las condiciones en que un sistema homogéneo de ecuaciones en diferencias puede representar una cadena de Markov de parámetro discreto.

Un sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo, como el considerado por Ralph W. Pfouts [2]:

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{11}\, x_1(t) + a_{12}\, x_1(t-1) + \ldots + a_{1,\,m+1}\, x_1(t-m) + a_{1,\,m+2}\, x_2(t) + \\
\qquad + \ldots + a_{1,n(m+1)}\, x_n(t-m) = 0 \\
a_{21}\, x_1(t) + a_{22}\, x_1(t-1) + \ldots + a_{2,\,m+1}\, x_1(t-m) + a_{2,\,m+2}\, x_2(t) + \\
\qquad + \ldots + a_{2,n(m+1)}\, x_n(t-m) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}\, x_1(t) + a_{n2}\, x_1(t-1) + \ldots + a_{n,\,m+1}\, x_1(t-m) + a_{n,\,m+2}\, x_2(t) + \\
\qquad + \ldots + a_{n,n(m+1)}\, x_n(t-m) = 0
\end{array}\right. \tag{3}$$

resulta demasiado general para asimilarlo al sistema (1), ya que éste es de primer orden, en tanto que el (3) es de m-ésimo orden; además, el sistema (1) tiene la matriz cuadrada, lo cual no ocurre en el (3). Por ello partiremos de un tipo de sistema de ecuaciones en diferencias, cuya analogía con el (1) es evidente:

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j(t) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

Este sistema ha sido estudiado por Birkhoff [3] y Norlund [4], entre otros autores, y su estabilidad y comportamiento asintótico, para un tipo mas general, por Perron [5] y Ta Li [6], el primero de estos dos autores para el caso en que las a_{ij} son constantes, es decir, independientes de t, y el segundo para el caso de que dicha dependencia exista. W. Hahn [7] ha aplicado el método de Liapunov al estudio de la estabilidad del sistema [4] en ambos casos.

Nuestro propósito ahora es, unicamente, precisar en qué condiciones las soluciones del sistema (4) satisfacen las propiedades de una cadena finita de Markov de parametro discreto, limitándonos, de momento, al caso en que las a_{ij} sean constantes.

Llamaremos matriz estocástica por columnas a toda matriz cuya transpuesta es una matriz estocastica ordinaria. Si P es una matriz estocástica ordinaria $n \times n$, de elementos p_{ij}, se cumplirá que $p_{ij} \geqslant 0$ y que

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots n);$$

entonces, al transponer esta matriz, se verificara que $p_{ji} \geqslant 0$ y que

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ji} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots n),.$$

es decir, que las columnas de la matriz transpuesta suman 1; de ahí la denominación referida. Es evidente que una matriz biestocástica es tambien estocastica por columnas.

Hemos de concretar el sentido de la expresión antes empleada al decir que «las soluciones del sistema (4) satisfacen las propiedades de una cadena finita de Markov de parámetro discreto». Significa ello que las funciones $x_i(t)$, soluciones del sistema (4), nos den, una vez resuelto éste, los valores de la probabilidad de que el sistema representado por la cadena se halle, al cumplirse el tiempo t, en el estado i-ésimo, debiendo, lógicamente, verificarse que $0 \leqslant x(t) \leqslant 1$ y que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1.$$

Observemos también que en (4) los vectores $x_i(t+1)$ y $x_j(t)$ son vectores-columna.

TEOREMA 1.—Las soluciones del sistema homogéneo de primer orden

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

de ecuaciones en diferencias, con coeficientes a_{ij} constantes y no negativos, satisfacen las propiedades de una cadena finita estacionaria de Markov de n estados, si el vector-columna de soluciones es estocástico y la matriz de coeficientes del sistema, $A \equiv [a_{ij}]$ es estocástica por columnas.

Demostración.—Si expresamos el sistema (5) en notación matricial, tendremos:

$$[x(t+1)] = [A]\,[x(t)] \tag{6}$$

siendo $[x(t+1)]$ y $[x(t)]$ vectores-columna de n términos. Transponiendo la igualdad matricial (5) obtenemos

$$[x(t+1)]' = [x(t)]'\,[A]' \tag{7}$$

expresión que, teniendo en cuenta la [2], vemos tiene la misma estructura que la cadena de Markov representada por esta última. Mas, habida cuenta de que, por hipótesis, el vector columna de soluciones $[x(t)]$ es estocástico, y la matriz $[A]$ es estocástica por columnas, sus transpuestos $[x(t)]'$ y $[A]'$ serán, respectivamente, vector-fila estocástico y matriz estocástica o de Markov.

Demostraremos ahora que, en (7), el vector $[x(t+1)]'$ es también estocástico. En efecto, escribamos en detalle el sistema (7):

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t+1) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2(t+1) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t+1) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{array}\right\} \tag{7'}$$

Si tenemos en cuenta que, por hipótesis, la matriz A es estocástica por columnas, se verificará que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ para } (j = 1, 2, \ldots . n).$$

Sumando verticalmente los segundos miembros del sistema (7'), obtenemos como resultado:

$$x_1(t) + x_2(t) + \ldots\ldots\ldots + x_n(t) = 1 \qquad (8)$$

ya que el vector $[x(t)]'$ es estocástico. En consecuencia tendremos:

$$x_1(t + 1) + x_2(t + 1) + \ldots\ldots\ldots + x_n(t + 1) = 1 \qquad (9)$$

es decir, que el vector $[x(t + 1)]'$, de términos no negativos, por serlo las a_{ij} y las $x_i(t)$, tiene la suma de dichos términos igual a 1, por lo cual es un vector estocástico, según queríamos probar.

En consecuencia, las soluciones del sistema (5) satisfacen las propiedades de una cadena finita de Markov de parámetro discreto t, con n estados, siendo sus probabilidades de transición los términos a_{ji} de la matriz A'. Q.E.D.

Recíproco.—Si las soluciones del sistema [5] satisfacen las propiedades de una cadena finita de Markov de n estados, los vectores-columna $[x(t)]$ y $[x(t + 1)]$ serán estocásticos, y sus transpuestos en [7] también lo serán. Probemos ahora que la matriz A' es estocástica, lo cual es evidente por ser la transpuesta de una matriz estocástica por columnas, quedando así demostrado el recíproco.

Podemos resumir el Teorema 1 y su recíproco en la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 1.—La condición necesaria y suficiente para que las soluciones del sistema homogéneo de primer orden

$$x_i(t + 1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots . n)$$

de ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes y no negativos satisfagan las propiedades de una cadena finita estacionaria de Markov, de parámetro discreto y n estados, es que el vector columna de soluciones $x(t)$ sea estocástico y que la matriz de coeficientes $A \equiv [a_{ij}]$ sea estocástica por columnas.

Corolario.—La proposición enunciada se cumple si la matriz $A \equiv [a_{ij}]$ es biestocástica.

Consideremos ahora el caso en que la matriz A dependa de t, es decir, que sus elementos a_{ij} dependan de t, suponiendo que las funciones $a_{ij}(t)$

son no negativas. Entonces, en lugar del sistema (5) tendremos el (4), más general. Para él podemos enunciar la proposición siguiente, que se demostraría de manera idéntica a la anterior.

PROPOSICIÓN 2.—La condición necesaria y suficiente para que las soluciones del sistema homogéneo de primer orden

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

de ecuaciones en diferencias con coeficientes variables $a_{ij}(t)$ no negativos, satisfagan las propiedades de una cadena finita no estacionaria de Markov de parámetro discreto y n estados, es que el vector columna de soluciones $[x(t)]$ sea estocástico y que la matriz de coeficientes $[A(t)] \equiv \equiv [a_{ij}(t)]$ sea estocástica por columnas.

También se cumplirá el corolario correlativo al anterior.

Volviendo al sistema (5) de ecuaciones en diferencias, surge de manera natural la cuestión de conocer, si se supone la matriz A estocástica por columnas, cuándo será estocástico el vector de soluciones. La respuesta a dicha cuestión viene dada por el siguiente

TEOREMA 2.—La condición necesaria y suficiente para que el vector-columna de soluciones del sistema homogéneo de primer orden

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots n) \tag{5}$$

de ecuaciones en diferencias, con $A \equiv [a_{ij}]$ estocástica por columnas, sea un vector estocástico, es que lo sea el vector-columna $[x(0(]'$ de condiciones iniciales del sistema.

Directo.—La solución de (5) existe y es única para cada sistema de valores iniciales (véase, por ejemplo, T. L. Saaty [8], página 165). Si en (7) hacemos $t = 0$, tendremos:

$$[x(1)]' = [x(0)]'\,[A]' \tag{10}$$

Si en esta expresión el vector inicial $[x(0)]'$ es estocástico, también lo será el $[x(1)]'$, en virtud de la demostración detallada en el anterior teorema, de que $[x(t+1)]'$ es estocástico al serlo $[x(t)]'$ y $[A]'$. Por inducción se probaría lo mismo para cualquier valor de t entero natural. En consecuencia, cualquier vector columna de soluciones correspondiente a condiciones iniciales estocásticas, será también estocástico. Q. E. D.

Recíproco.—Si el vector columna de soluciones del sistema (5) es estocástico, veamos que también ha de serlo $[x(0)]'$. En efecto, en (10), si lo escribimos en detalle, tendremos:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1(1) = a_{11}x_1(0) + a_{12}x_2(0) + \ldots + a_{1n}x_n(0) \\ x_2(1) = a_{21}x_1(0) + a_{22}x_2(0) + \ldots + a_{2n}x_n(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(1) = a_{n1}x_1(0) + a_{n2}x_2(0) + \ldots + a_{nn}x_n(0) \end{array}\right. \tag{11}$$

Basta sumar verticalmente en (11), teniendo en cuenta que $[x(1)]'$ es estocástico y que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \ (j = 1, 2, \ldots n),$$

para obtener:

$$1 = x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + \ldots + x_n(0) \tag{12}$$

que prueba que $[x(0)]'$ es estocástico. Q.E.D.

Observemos que el teorema 2 es válido también para el caso en que la matriz A dependa de t, con lo que la cadena de Markov correspondiente sería no estacionaria.

Teniendo en cuenta el Teorema 2, y el carácter estocástico que imprimen al sistema (5) de ecuaciones en diferencias, la configuración de la matriz A y el vector $[x(0)]'$ en las hipótesis de dicho teorema, podemos precisar y especializar el aserto 1, enunciado al principio de este trabajo, en la forma siguiente:

Aserto 2.—Toda cadena finita de Markov con parámetro discreto, estacionaria o no, origina un sistema estocástico de ecuaciones en diferencias

$$[p(t + 1)] = [p(t)]\ [T] \tag{13}$$

homogéneo y de primer orden, con $[p(t + 1)]$ y $[p(t)]$ vectores estocásticos y $[T]$ matriz de transición, viniendo determinada la aleatoriedad de dicho sistema por el carácter estocástico del vector de condiciones iniciales.

Este aserto establece una relación entre la teoría de las cadenas de Markov y las ecuaciones estocásticas en diferencias, correlativas en el campo de las diferencias finitas, a las ecuaciones diferenciales estocásticas. Observemos que, análogamente a lo que sucede con la clase de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas en que la aleatoriedad se introduce únicamente por medio de las condiciones iniciales (*Vid.* Saaty [8], cap. 8 «Stochastic differential equations», 8-2, «Random initial condition», pág. 350 y sigs.), en el sistema (13) las propiedades estocásticas de los vectores soluciones están relacionadas de manera no aleatoria, sino funcional o determinista, con las propiedades estocásticas de las condiciones iniciales, ya que en dicho sistema, tanto si la cadena es estacionaria como si no lo es, el vector $[p(t+1)]$ queda determinado funcionalmente a partir del $[p(t)]$, éste a partir del $[p(t-1)]$, etcétera, hasta llegar al vector $[p(0)]$ de condiciones iniciales.

REFERENCIAS

1. ORNELLO VITALI: «Le equazioni alle differenze finite e le catene markoviane». *Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari*. Anno XXVII - N. 2. 2.º sem. 1964.

2. RAPLH W. PFOUTS: «A note on systems of simultaneous linear difference equations with constant coefficients». *Naval Research Logistics Quarterly*, 12 (1965), págs. 335-340. (Recensión en *Mathematical Reviews*, octubre 1967, Review no. 4.734).

3. G. D. BIRKHOFF: «General theory of linear difference equations». *Trans. Amer. Math. Soc.* 12 (1911), p. 243-284.

4. N. E. NORLUND: *Leçons sur les équations linéaires aux différences finies*. Gauthier-Villars. París, 1929, pág. 112.

5. O. PERRON: «Über Stabilitat und asymptotisches Verhalten der Lósungen eines Systems endlicher Differenzenglei Schungen». *Journ. fur die reine und angew. Math.*, Bd. 161 (1929), S. 41-64.

6. TA LI: «Die Stabilitatsfrage bei Differenzengleichungen». Acta Math. 63 (1934), S. 99-141.

7. WOLFGANG HAHN: «Über die Anwendung der Methode von Ljapunov auf Differenzengleichungen». *Math. Annalen*, Bd. 136 (1958), S. 430-441.

8. THOMAS L. SAATY: *Modern non linear equations*, MacGraw-Hill. New York, 1967.

RÉSUMÉ

SUR LES RÉLATIONS ENTRE LES CHAÎNES DE MARKOV ET LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES

On établit la condition nécessaire et suffisante pour que le système homogène de premier ordre

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j(t) \quad , , \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

d'équations aux différences finies acomplisse les propiétés d'une chaîne de Markov finie stationnaire ou non stationnaire, en indiquant aussi

une rélation entre les dites chaînes et les équations stochastiques aux différences finies.

SUMMARY

ON THE RELATIONS BETWEEN MARKOV CHAINS AND SYSTEMS OF DIFFERENCE EQUATIONS

The necessary and sufficient condition is established for the accomplishment, by the homogeneous first-order system of difference equations

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j(t) \quad ,, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

of the properties of either stationary or non stationary finite Markov chains. A relation is pointed out between Markov chains and stochastic difference equations.