SOBRE ESPACIOS VECTORIALES EN DUALIDAD

Por

ALFONSO CASAL PIGA, ANTONIO GUERRERO FERNANDEZ
Y MARIO GUERRERO FERNANDEZ

INTRODUCCION

Abordamos en el presente trabajo el problema natural de estudiar algunas relaciones topológicas entre dos espacios vectoriales E y F sobre el cuerpo complejo C, supuesto que se encuentran en dualidad.

La originalidad de lo que se expone no radica en los resultados, no nuevos, sino en el proceso seguido en su obtención y demostraciones realizadas.

* * *

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre C en dualidad, y $\sigma(E, F)$ la topología débil definida por la dualidad. (V. BOURBAKI, Livre V, Ch. IV.)

Consideremos sobre E la estructura uniforme U asociada a la topología $\sigma(E, F)$.

PROPOSICIÓN 1.—La estructura uniforme U es separada.

Basta probar que la intersección de las vecindades de U se reduce a la diagonal de $E \times E$.

Sea un elemento (x, y) de la intersección. Esto quiere decir que $x - y$ pertenece a todos los entornos de cero en $\sigma(E, F)$. En virtud de la dualidad entre E y F, $x - y = 0$.

Corolario 1.—La topología $\sigma(E, F)$ es separada.

Corolario 2.—El espacio E es regular.

Sea $\{p_y\}$, $y \in F$, la familia de seminormas sobre E inducidas por la dualidad:

$$p_y \colon x \longrightarrow p_y(x) = |\langle y, x\rangle| \; ; \; \forall\, x \in E$$

Formamos la familia filtrante P de seminormas sobre E, cuyos elementos son extremos superiores de todas las familias finitas de $\{p_y\}$, $y \in F$. Sea τ la topología localmente convexa definida por P.

PROPOSICIÓN 2.—La topología $\sigma(E, F)$ es localmente convexa.

Las topologías $\sigma(E, F)$ y τ coinciden:

A) $\tau \subset \sigma(E, F)$, puesto que un entorno cualquiera $V_{i,\varepsilon} \in \tau$ es tal que $V_{i,c} = \{x \mid x \in E;\ p_i(x) \leqslant \varepsilon\ ;\ p_i \in P\}$.

Como p_i es extremo superior de una familia finita de seminormas $p_{y_1}, \ldots, p_{y_i}$, se verifica

$$V_{i,\varepsilon} = \bigcap_{j=1}^{n} V_{py_j,\varepsilon}$$

Ahora bien, $V_{py_j,\varepsilon}$ es un entorno de cero en $\sigma(E, F)$ y, por tanto, también lo es $V_{i,\varepsilon}$.

B) $\sigma(E, F) \subset \tau$ es evidente.

Se designa por F^* el dual algébrico de F, dotado de la topología débil $\sigma(F^*, F)$.

Como se sabe, para esta topología, la estructura uniforme asociada sobre F^*, es separada, y F^* es regular.

PROPOSICIÓN 3.—La topología inducida por $\sigma(F^*, F)$ sobre E coincide con la topología $\sigma(E, F)$, considerando E como subespacio de F^*.

Basta considerar que la restricción a E de F^* limita las formas lineales sobre F, a aquellas que están definidas por la dualidad entre E y F.

Es sabido que toda forma lineal y continua sobre F se escribe $y^* \to$ $\to < y^*, y >$ para uno y un sólo elemento $y \in F$. Sea y_u el correspondiente a la forma lineal y continua de la siguiente

PROPOSICIÓN 4.—E es denso en F^*.

Supongamos que E no es denso en F^*. Existe un punto $z_0 \in F$, $z_0 \notin E$, y un entorno suyo V_0, abierto y convexo, que verifica $E \cap V_0 = \emptyset$. Por el teorema de Hahn-Banach existe un hiperplano cerrado H, que contiene a E y tal que $H \cap V_0 = \emptyset$. Sea $< x, y_u > = 0$ la ecuación de H. Esto implica que $< z, y_u > \neq 0$ si $z \in V_0$. Entonces y_u ha de ser distinto de cero, y además $y_u \in F$, por lo que, por la dualidad entre E y F, ha de existir un $x \in E$, tal que $< x, y_u > \neq 0$. Llegamos a contradicción. E es, pues, denso en F^*.

PROPOSICIÓN 5.—F^* es completo.

La demostración se basa en establecer un isomorfismo uniformemente continuo entre el completado (separado) de E, que notaremos $\hat{E}$, y F^*.

a) Existe un isomorfismo continuo de $\hat{E}$ sobre F^*.

Sea E' el subespacio de $\hat{E}$, denso en $\hat{E}$ e isomorfo a E.. (El teorema de compleción de espacios uniformes nos asegura un isomorfismo uniformemente continuo de E sobre E').

Por otra parte tenemos $E \subset F^*$ y denso en F^* (Prop. 4), y como las topologías $\sigma(E, F)$ y $\sigma(F^*, F)$ coinciden sobre E (Prop. 3), podemos establecer un isomorfismo uniformemente continuo de E′ sobre E, considerado en F^*, que notaremos f.

Dado que F^* es regular, la prolongación $\bar{f}$ de f a $\hat{E}$ es continua. Lo mismo ocurre con la prolongación $\overline{f^{-1}}$ de f^{-1} a F^*. La aplicación $\overline{f^{-1}} \circ \bar{f}$ de $\hat{E}$ sobre sí mismo, es continua y coincide con la identidad sobre E′ (denso en $\hat{E}$), de modo que dicha aplicación es la identidad sobre $\hat{E}$. Análogamente podemos decir que $\bar{f} \circ \overline{f^{-1}}$ es la identidad sobre F^*. De aquí resulta *a)*.

b) El isomorfismo $\bar{f}$ es uniformemente continuo.

Definimos sobre $\hat{E}$ la estructura lineal trasladada de F^* mediante $\overline{f^{-1}}$ del siguiente modo:

Sean $x, y \in F$, $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{E}$ las imágenes respectivas $\overline{f^{-1}}$: $x \to \hat{x}$, $y \to \hat{y}$, $x + y \to \widehat{x+y}$.

Definimos la operación $+$ sobre $\hat{E}$ como la operación

$$(\hat{x}, \hat{y}) \to \hat{x} + \hat{y} = \overline{f^{-1}}(x + y)$$

Del mismo modo, si $\alpha \in C$ la operación externa es tal que

$$(\alpha, \hat{x}) \to \alpha\, \hat{x} = \overline{f^{-1}}(\alpha\, x)$$

Es fácil comprobar que de este modo $\hat{E}$ es un espacio vectorial sobre C.

Esta estructura es compatible con la estructura uniforme de $\hat{E}$. Es decir, la aplicación $(\hat{x}, \hat{y}) \to \hat{x} + \hat{y}$, es continua.

Sea $\hat{V}$ un entorno de $\hat{x} + \hat{y}$. $V = \bar{f}(\hat{V})$ es un entorno en F^* de $x + y$ por la continuidad de $\bar{f}$. En F^* existen V′ y V″ (entornos de x e y), tales que para todo $x' \in V'$ y todo $y' \in V''$, $x' + y' \in V$. Si tomamos $\hat{V}' = \overline{f^{-1}}(V')$ y $\hat{V}'' = \overline{f^{-1}}(V'')$, entornos de $\hat{x}$ e $\hat{y}$, se verifica, en virtud de la definición de suma en $\hat{E}$, que $\forall\, \hat{x}' \in \hat{V}'$ y $\forall\, \hat{y}' \in \hat{V}''$: $\hat{x}' + \hat{y}' \in \hat{V}$.

Del mismo modo se demuestra que $(\alpha, \hat{x}) \to \alpha\, \hat{x}$ es continua.

$\bar{f}$ es, pues, un isomorfismo lineal y continuo de $\hat{E}$ sobre F^*, de donde *b)*.

c) Como $\bar{f}$ conserva las estructuras uniformes, resulta que F^* es el completado de E, salvo un isomorfismo.

BIBLIOGRAFIA

BOURBAKI, N.: 1) *Espaces vectoriels topologiques*. Ch. IV. Hermann. 2) *Topologie générale*. Ch. 1 et 2. Hermann.

CHOQUET, M.: *Topologie et théorie des fonctions*. CDU, París.

GARSOUX, J.: *Espaces vectoriels topologiques et distributions*. Dunod.