DEFINICION DE POLIGONO PLANO A PARTIR DE UN SISTEMA DE AXIOMAS. ORDEN DE CONEXION DE UN POLIGONO PLANO

por

ALBERTO PEREZ DE VARGAS LUQUE

Definición 1. Un plano π es un conjunto dotado de estructura por medio de un conjunto $\{r_i\}_{i \in I}$ de partes de π que llamaremos rectas.

$$\pi = \bigcup r_j \quad j \in I$$

$$r_j \in \{r_i\} \quad i \in I$$

Axioma 1. Un plano contiene, al menos, dos rectas y cada recta contiene, al menos, dos puntos.

Definición 2. Dos rectas $r, s \subset \pi$ son paralelas si y solamente si $r = s$ o $r \cap s = \Phi$. Escribiremos $r \parallel s$. En otro caso diremos que las rectas son secantes. Si un punto A pertenece a r diremos que r pasa por A.

Definición 3. Una parte $X \subset \pi$ está alineada si existe r, tal que $X \subset r$.

Axioma 2. Para todo par de puntos A y B de π, $A \neq B$, existe una, y solamente una, recta r que pasa por ellos.

Corolario 1. Dos rectas secantes tienen un punto común y solamente uno.

Axioma 3. Para toda recta r y para todo punto A existe una, y solamente una, recta que pasa por A y es paralela a r.

Proposición 1. El paralelismo de rectas define en $\{r_i\}_{i \in I}$ una relación de igualdad.

Demostración

i) $$r_1 = r_2 \Rightarrow r_1 \parallel r_2$$

ii) $$r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r_1 = r_2 \\ \text{ó} \\ r_1 \cap r_2 = \Phi \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r_2 = r_1 \\ \\ r_2 \cap r_1 = \Phi \end{array} \right. \Leftrightarrow r_2 \parallel r_1$$

iii)

$$r_1 \parallel r_2 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} r_1 = r_2 \\ r_1 \cap r_2 = \Phi \end{array} \right.$$

$$r_2 \parallel r_3 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} r_2 = r_3 \\ r_2 \cap r_3 = \Phi \end{array} \right.$$

Si $r_1 \cap r_3 = \Phi$, entonces $r_1 \parallel r_3$ y queda demostrada la propiedad.

Si $r_1 \cap r_3 \neq \Phi$, entonces existirá $A \in r_1 \cap r_3$ ($A \notin r_2$).

r_1 contiene a A y es paralela a r_2 por hipótesis; r_3 contiene a A y es paralela a r_2 por hipótesis: Se contradice el axioma 3, a no ser que $r_1 = r_2$. En consecuencia $r_1 \parallel r_3$ *q. d. e.*

Definición 4. Si llamamos $R = \{r_i\}_{i \in I}$, los elementos de $R/_{\parallel}$ se llaman direcciones en π.

Axioma 4. A toda recta r estan asociadas dos estructuras de orden total, opuestas entre sí.

i) Una recta orientada es una recta sobre la que se ha construido una de estas dos ordenaciones.

ii) Dados A, B $\in r$, indicaremos con r_{AB} a r orientada de forma que $A < B$. El Axioma 2 implica la unicidad de la existencia de r.

iii) Elegido cualquier A de r, se llama semirrecta positiva —abierta— cerrada de origen A al conjunto — $\{B \mid B > A\}$ — $\{B \mid B \geqslant A\}$. Semirrecta negativa de origen A a los conjuntos $\{B \mid B < A\}$; $\{B \mid B \leqslant A\}$, en cada caso.

iv) Dados dos puntos de una recta, A y B, diremos que C está entre A y B si $A < C$ y $C < B$.

Axioma 5. Entre dos puntos, cualesquiera, de una recta, existe otro punto.

Corolario 2. En una recta hay un número infinito de puntos.

Definición 5. Dado un conjunto $\mathbf{C}$ cualquiera y una ordenación $\leqslant$ de C, no necesariamente total, se llama segmento de extremos A, B $\in \mathbf{C}$ al conjunto

$$[A, B] = \{x \mid A \leqslant x \leqslant B\}$$

Se llama intervalo de extremos A, B $\in \mathbf{C}$ a: $(A, B) = [A, B] - \{A, B\}$.

Definición 6. Tres puntos no alineados A, B, C constituyen una figura geométrica que se llama Trivértice. Los segmentos [AB], [BC] y [BA] se llaman lados del trivértice.

Axioma 6. Una recta que corta a un lado de un trivértice y no pasa por ningún vértice, corta a otro lado.

Definición 7. Dado $H \subset C(\leqslant)$ se dice que H es una figura convexa si para todo par de puntos A, B $\in$ H se verifica que $[A, B] \subset H$.

Definición 8. Dado $K \subset \mathbf{C}(\leqslant)$, se llama cierre convexo de K y se escribe $\widehat{K}$ a: $\widehat{K} = \bigcap_{K \subset H} H$, donde H representa a figuras convexas de $\mathbf{C}$.

Proposición 2. Supuesto, por convenio, que Φ es una figura convexa, la intersección en número finito o infinito de figuras convexas es una figura convexa.

Demostración. Si A, B $\in \bigcap_{i \in I} H_i$; I finito o infinito, entonces A, B $\in H_i$, $\forall i$, lo que implica que [A, B] $\subset H_i$, $\forall i$, es decir, [A, B] $\subset \bigcap H_i$, $i \in$ I.

Coroloario 3. El cierre convexo $\widehat{K}$ de un conjunto K es una figura convexa.

Proposición 3. Un punto A de una recta r la divide en dos partes disjuntas convexas que llamaremos semirrectas de origen A.

Demostración. Sea $r(\leqslant)$ y A $\in r$. Será $r = r_1 \cup r_2 \cup A$, llamando r_1 a la semirrecta que está a la derecha de A y r_2 a la que está a la izquiera

Sean X e Y dos puntos de r_1 y Z $\in$ [X, Y]. Si Z $\notin r_1$ entonces Z $\in r_2$, o bien Z = A; supongamos que Z $\in r_2$, r_1 y r_2 están totalmente ordenados por ser partes de r, entonces $\forall Y_1 \in r_1$ y $\forall Y_2 \in r_2 \Longrightarrow Y_2 \leqslant Y_1 \Longrightarrow Z \leqslant Y_1 \ \forall Y_1 \in r_1 \Longrightarrow Z \notin$ [X, Y].

Si Z = A, entonces A $\in$ [X, Y], lo que quiere decir que X $\leqslant$ A $\leqslant$ Y y esto implicaría que X $\notin r_1$, contra la hipótesis.

Con análogo razonamiento conlcuiríamos que todo segmento de extremos en r_2 está totalmente contenido en r_2.

Proposición 4. Dadas dos rectas paralelas r_1 y r_2 y cuatro puntos, A_1, A_2, B_1, B_2, tales que $A_1, B_1 \in r_1$ y $A_2, B_2 \in r_2$; toda paralela a r_1 y r_2, que contenga a un punto de $[A_1, A_2]$ contiene a un punto de $[B_1, B_2]$.

Demostración. Sea C_2 un punto de r_2 entre A_2 y B_2 y sea el trivértice $A_1A_2C_2$. La recta r_3, paralela a r_1 y r_2, que contiene a un punto de $[A_1, A_2]$ y no pasa por ningun vértice A_1, A_2 ó C_2, corta al lado $A_1 A_2$, por tanto —axioma 6— corta al lado A_1C_2, ya que es paralela a la recta que contiene a A_2, C_2.

Razonando de la misma forma sobre el trivértice $C_2B_1B_2$, se demuestra, de manera inmediata, la proposición.

Corolario 4. Inmediatamente se desprende de esta proposición que si es ρ la dirección de r_1 y r_2, la proyección φ de $[B_1, B_2]$ en la dirección ρ sobre $[A_1 = \varphi(B_1), A_2 = \varphi(B_2)]$ es una biyección.

Esto nos conduce a un resultado importante: Si es r una recta de π y φ la proyección de una figura convexa H de π, H $\not\subset r$, sobre r; φ(H) es una figura convexa. Análogamente, si H $\subset r$, entonces φ^{-1}(H) es también una figura convexa.

Escribamos, pues:

Proposición 5. Una recta r de un plano π divide a éste en dos partes disjuntas y convexas, que llamaremos semiplanos de borde r.

Este resultado y la proposición 2 da paso a:

Proposición 6. La intersección de dos semiplanos cuyos bordes tienen un punto común es una figura convexa, llamada Región Angular Convexa.

Definición 9. Si A, B, C, son tres puntos no alineados; escribiremos BC_A e interpretaremos, semiplano de borde BC, que contiene a A; CA_B semiplano de borde CA, que contiene a B y AB_C semiplano de borde AB que contiene a C.

Triángulo es la figura convexa T = $BC_A \cap CA_B \cap AB_C$. Los puntos A, B, C se llaman vértices del triángulo. Los bordes BC, CA y AB se llaman lados del triángulo.

Definición 10. El conjunto finito y ordenado $\{T_1 \ldots\ldots T_n\}$ de triángulos es Cadena Fuerte de Triángulos si cada uno tiene un lado común con el siguietente y dos triángulos cualesquiera no tienen ningún punto interior común.

Definición 11. $\bigcup_{i \in I} T_i$ forman POLIGONO cuando

i) Si $T_\alpha, T_\beta \in \{T_i\}_{i \in I}$ existe una caedna fuerte de triángulos de $\{T_i\}_{i \in I}$, que une T_α con T_β, siendo T_α el primer triángulo de la cadena y T_β el último.

ii) $T_i \cap T_j \ \forall i, j \in I$ es un conjunto que no contiene ningun punto interior a T_i ni a T_j

iii) Si T_i y T_j tienen un vértice comun, existe una cadena fuerte de triángulos de $\{T_i\}_{i \in I}$ que une T_i con T_j y tal que todos ellos tienen dicho vértice común.

Definicion 12. Poligonal es un conjunto finito y ordenado de segmentos tal que cada uno de ellos tiene un extremo común con el siguiente y dos segmentos, no consecutivos, no tienen ningún punto común, a excepción del primero y ultimo segmento que pueden tener un extremo común, en cuyo caso la poligonal se llama Cerrada.

Definición 13. Borde de un polígono es el conjunto de puntos de el que pertenecen a un lado de un triángulo y no pertenecen a ningún otro triángulo.

Lema 1. Por un punto pasan infinitas rectas.

Demostración. Es consecuencia inmediata del Axioma 2 y del Corolario 2, pues basta tomar las rectas que pasan por el punto considerado y por los de una recta que no lo contenga.

Lema 2. Un triángulo posee, al menos, un punto interior.

Demostración. Sea el triángulo de vértices A, B, C. Sea D un punto entre B y C, y sea M un punto entre A y D.

Evidentemente $M \in BC_A$. Por otra parte $M \in AB_C$ por ser AB_C una región convexa y ser M un punto del segmento [A, D], cuyos extremos están contenidos en AB_C. $M \in AC_B$ por análoga razón, y en consecuencia M es interior al triángulo *q. d. e.*

Lema 3. Hay, por lo menos, una poligonal cerrada p. totalmente contenida en el borde de un polígono $\mathcal{P}$.

Demostración. Consideremos el triángulo T del polígono $\mathcal{P}$ de vértices A, B y C. Sea D un punto del segmento [A, B]. Sea P un punto del lado DC del nuevo triángulo formado, de vértices D, C y B. P es, trivialmente, interior al triángulo T. Por P pasan infinitas rectas: Sea r una recta que pase por P y no incida con D ni con ningún vértice de los triángulos que constituyen $\mathcal{P}$. El Axioma 6 nos permite afirmar que r corta a otro lado del triángulo de vértices D, B y C y, por consiguiente a un lado del triángulo T. Este lado pertenece a otro triángulo T_1 o es del borde.

r corta a un lado de T_1, ha de cortar, pues, a otro, que puede también ser de un nuevo triángulo T_2 o pertenecer al borde. El proceso, finito, nos permite encontrar un lado l de un triángulo T_α que no pertenece a ningún otro triángulo del polígono y que, por tanto, forma parte del borde de $\mathfrak{T}$.

Sea A uno de los vértices de T_α que pertenecen a 1 —estos dos vértices no pueden pertenecer, en exclusiva, a T_α porque se rompería la estructura de polígono como cadena fuerte de triángulos— y a otro triángulo T_β. Ha de existir una cadena fuerte de triángulos que una T_α con T_β con vértice común en A. Si aun A pertenecen a otro triángulo T_γ no comprendido en la cadena anterior, habrá una nueva cadena que una T_β con T_γ.

Este proceso, finito, conduce a un triángulo T_δ con un lado en el borde de $\mathfrak{T}$.

Si llamamos B al vértice de T_δ consecutivo a A, sobre el lado encontrado de T_δ, podemos edificar una figura análoga, razonando del mismo modo a como lo hacíamos en A.

Iterando el proceso y teniendo en cuenta su naturaleza finita —encontramos lados que sólo pertenecen a un triángulo y hay un número finito de ellos— llegaremos a un A′ que, o bien pertenece a 1 de T_α, en cuyo caso cerraremos la poligonal construida, o bien sólo pertenece a un triángulo $T_{\alpha'}$; pero si así fuera ha de haber otro lado de $T_{\alpha'}$, conteniendo a A′, y que fomre parte del borde de $\mathfrak{T}$.

Sea A″ el otro vértice de $T_{\alpha'}$, que con el A′ determina dicho lado. Tomamos A″ y continuamos el proceso hasta encontrar —salvada la posibilidad, de esta forma, de que se presente un A‴ en estas condiciones— el vértice que junto con A determina 1. (Descartamos, por trivial, el caso en que A′ pertenezca, precisamente, a $T\alpha$ y solamente a T_α).

Al comienzo de la demostración hemos tomado una de las semirrectas de origen P sobre *r*, pero también podíamos haber tomado la otra, que nos conduciría, análogamente, a encontrar una poligonal cerrada p' contenida en el borde, pudiendo ser $p' = p$.

Corolario 5. Si un lado 1 de un triángulo del polígono $\mathfrak{T}$ pertenece al borde, pertenece a alguna poligonal cerrada p del borde.

Lema 4. Si las poligonales cerradas p_1 y p_2 están contenidas en el borde de un polígono $\mathfrak{T}$, su intersección es vacía.

Demostración. Supongamos que $P \in p_1 \cap p_2$. Por ser $P \in p_1$, entonces P pertenece al borde, es decir, P pertenece a un lado 1_α de un sólo triángulo T_α. Por ser $P \in p_2$, entonces P pertenece al borde, es decir, P pertenece a un lado 1_β de un sólo triángulo T_β.

La definición de polígono implica que la intersección $1_\alpha \cap 1_\beta$ contiene a un punto solamente, vértice común a $T\alpha$ y T_β, ó $1_\alpha = 1_\beta$, o bien $1_\alpha \cap 1_\beta = \Phi$. Descartada esta posibilidad por ser contraria a la hipótesis, pueden darse cualquiera de los otros dos casos:

Si $1_\alpha = 1_\beta$; sea A_1 uno de los extremos de 1_α y sea 1_{α_1} el segmento de poligonal p_1 continguo a 1_α con extremo comun A_1. Sea 1_{α_2} el segmento de poligonal p_2 continguo a 1_α con extremo comun A_1. Supongamos que $1_{\alpha_1} \neq 1_{\alpha_2}$ pues de ser $1_{\alpha_1} = 1_{\alpha_2}$ podríamos situarnos en el otro extremo B_1 y repetir el proceso. De no poderlo hacer, es que todosc los lados respectivos de cada poligonal coinciden, en cuyo caso $p_1 = p_2$. — entonces 1_α, 1_{α_1} y 1_{α_2}, que pertenecen al borde del polígono, tienen un sólo punto común A_1 —pues de tener otro coincidirían—. Esta configuración geométrica contradice la estructura de polígono, pues el triángulo T_{α_1} de lado 1_{α_1} y el T_{α_2}, de lado 1_{α_2}, tendría un vértice común y no podrían unirse mediante una cadena fuerte de triángulos con vértice común en A_1.

Sólo queda, pues, la posibilidad de que $1_{\alpha_1} \cap 1_{\alpha_2}$ sea un sólo punto Q, vértice común a T_α y T_β. Sea 1_{α_1} el segmento de poligonal p_1 contiguo con 1_α y de extremo común en Q, y 1_{β_1} el segmento de poligonal p_2 contiguo con 1_β y de extremo comun en Q.

Si $1_{\alpha_1} = 1_{\beta_1}$, tendríamos la misma figura que en el caso anterior. Si $1_{\alpha_1} \neq 1_{\beta_1}$, observamos que 1_α, 1_{α_1}, 1_β, 1_{β_1}, que inciden en Q pertenecen al borde del polígono $\mathcal{T}$ y esto, por la misma razón que apuntabamos antes, no es posible.

No puede haber, concluyendo, ningun punto común a dos poligonales cerradas p_1 y p_2 contenidas en el borde de $\mathcal{T}$, es decir, $p_1 \cap p_2 = \Phi$ ... *q. d. e.*

De todo lo visto se deduce, trivialmente, el siguiente:

TEOREMA: El borde de un polígono está formado por un número finito de poligonales cerradas.

Definición 14. Si es n el número de poligonales cerradas que constituyen el borde de un polígono plano $\mathcal{T}$ llamaremos ORDEN DE CONEXION de $\mathcal{T}$ al número $n - 1$.

NOTA. Este trabajo ha sido realizado tomando como base las explicaciones dadas por el Profesor Abellanas durante el curso 1964/65 a los alumnos de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Madrid. A él agradecemos su indispensable y sabia dirección.

Han sido consultadas las obras:

G. CHOQUET. *L'enseignement de la géometrie.* Hermann, París 1964.
D. HILBERT. *Fundamentos de la Geometría.* Traducción de la séptima edición alemana. Instituto Jorge Juan de Matemáticas del C. S. I C. Madrid 1953.