SECCION DE METODOLOGIA Y DIDACTICA MATEMATICA

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS EN EL MATERIAL CUISENAIRE

por

JOAQUÍN GELABERTÓ RISSECH

Estando todavía en mi anterior destino oficial, en el Instituto Técnico de Enseñanza Media de Benicarló, organizamos, con la Inspección de Zona de Primera Enseñanza, un cursillo para maestros nacionales de la localidad y comarca vecina, cuya finalidad era darles a conocer los «números en color». de los que yo había realizado un estudio de cierta profundidad durante unas vacaciones veraniegas en que estuvo en España Mlle. Madeleine Goutard, entusiasta adalid de los mismos. A pesar de que ella se dedica fundamentalmente a divulgar sus aplicaciones a la enseñanza de la Aritmética en su más amplia generalidad, con sistemas de numeración en cualquier base, a nivel de niños de seis nueve años, en algunas de sus charlas me hizo descubrir su utilidad para introducir los conceptos y estructuras del Algebra Moderna en los primeros cursos de la enseñanza media.

Por ello creo que este material podría pasar a engrosar la relación de los medios existentes para análoga finalidad, como las transparencias de Papy, los bloques lógicos de Dienes, las tarjetas perforadas de Fletcher, etc., con la ventaja, además, de constituir un modelo completo del anillo de los números enteros y del semicuerpo de los racionales positivos.

Aunque la finalidad del cursillo era que los maestros se impusieran en el manejo de las regletas de Cuisenaire, con objeto de poder hacer a sus alumnos más atractivo, y motivado, el aprendizaje de la Aritmética, aproveché la ocasión para iniciarles en la Matemática moderna, con ayuda de este material, siguiendo las sugerencias de Mlle. Goutard, en conexión con lo expuesto sobre el tema por el Dr. Gattegno, su gran teorizador y divulgador.

Estimo interesante resumir en este trabajo algunas de las posibilidades que el material nos deparó, las cuales resultan ahora más dignas de consideración, con motivo de la puesta en marcha del nuevo cuestionario de Matemáticas en el Bachillerato elemental, a consecuencia de la ley de unificación de la enseñanza media en este grado.

El contenido de la caja de regletas, vaciado sobre la mesa, sugiere ya una inmensa variedad de conjuntos y subconjuntos, de los cuales los más inmediatos son los que Mlle. Goutard llama *familias* (familia *amarilla*, familia *roja*, familia *azul*, etc.). La obtención de todos los subconjuntos de un conjunto es algo muy fácil de realizar con las regletas. Para las operaciones de unión y de intersección de conjuntos conviene considerar como *una sola* todas las regletas de un mismo color pertenecientes a un mismo conjunto.

Esta última consideración da pie para introducir en el conjunto de *todas* las regletas la relación de equivalencia definida por la igualdad de color (o de tamaño). Cada regleta de un determinado color es un representante de la clase de equivalencia correspondiente, y el conjunto cociente está formado por las diez regletas distintas.

La consideración del tamaño, con preferencia al color, permite definir una relación de orden $\leqslant$, que induce en el conjunto cociente una de orden $<$.

La operación de sumar (formación de trenes de regletas) confiere al conjunto cociente, imaginariamente prolongado, estructura de semigrupo conmutativo, con o sin elemento neutro, según admitamos, o no, una regleta de la misma sección que las demás (1 cm²) pero de longitud cero (por ejemplo, un cuadradito de papel, de 1 cm. de lado). La figura n.º 1 muestra gráficamente la adición de regletas.

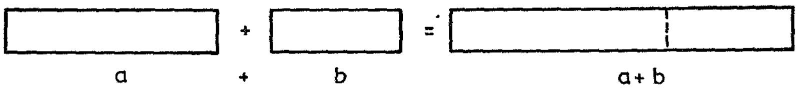

Fig. 1

La conmutatividad y asociatividad de la operación son inmediatas, como consecuencia de su definición y práctica, habida cuenta de la relación de igualdad deducida de la comparación de tamaños.

Otra operación interna puede definirse en el mismo conjunto, el producto, materializado por el cruce de las dos regletas factores, esquematización de un rectángulo de regletas, que se resuelve en un tren unicolor, según se representa en la figura n.º 2. (Ver notas finales.)

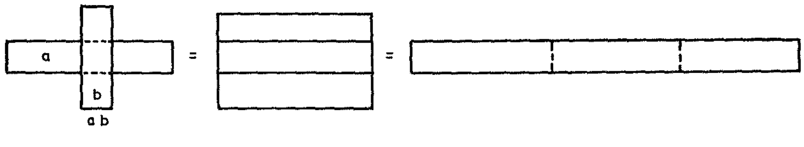

Fig. 2

Muy fáciles de demostrar son las propiedades de esta nueva operación: conmutativa, asociativa, distributiva respecto de la adición, y con elemento neutro —la regleta blanca—, que introduce en el conjunto, junto con la suma, una estructura de semianillo unitario y conmutativo. Está es la razón de que el material Cuisenaire sea tan apropiado para la enseñanza de la Aritmética del número natural.

El paso de la consideración individual de las regletas, con plenitud de entidad para cada una, a la consideración de las parejas ordenadas de ellas, permite enriquecer extraordinariamente el contenido estructural del conjunto. En efecto, entre las parejas ordenadas de regletas podemos establecer dos relaciones de equivalencia de gran fecundidad y trascendencia.

La primera de dichas equivalencias: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$, siendo (a,b) y (c,d) sendas parejas ordenadas de regletas, $a + d$ y $b + c$, trenes de dos regletas cada uno, como indica la figura n.º 3, permite la simetrización de la operación aditiva, si la definimos entre parejas de forma estable frente a la relación de equivalencia, por ejemplo así: $(a,b) + (c,d) =$

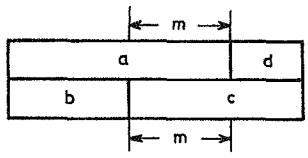

Fig. 3

$= (a + c, b + d)$, adoptando el conjunto cociente de las parejas respecto de la relación $\sim$, estructura de grupo aditivo. La clase neutra de esta operación es la (a,a) de todas las parejas de regletas iguales, y la clase simétrica de la representada por la pareja (a,b) es la representada por (b,a). Proyectado esto al campo de la Aritmética, si el conjunto de las 10 regletas más la regleta nula, imaginaria e indefinidamente prolongado, lo identificamos con el conjunto de los números naturales, por el isomorfismo que salta a la vista entre ambos, el conjunto cociente que acabamos de estructurar en el de las parejas ordenadas es isomorfo con el grupo aditivo de los números enteros.

Es más: ello permite, con gran eficacia didáctica, no sólo introducir los enteros negativos, sino también resolver el problema práctico de la sustracción de números naturales, tomando entre todas las parejas equivalentes a una dada —con la misma diferencia, individualizadora de la clase (ver figura n.º 3)— la de más fácil resta; además, si la primera regleta de la pareja ordenada (a,b) es mayor que la segunda, podremos afectar con el signo + a la diferencia $m = a - b$, y si la primera regleta de la pareja (a',b') es menor que la segunda, con el signo — a la diferencia $n = b' - a'$. Entendiendo como exclusivamente predicativo el valor de estos signos, tenemos así un medio sencillo de representar simbólicamente las distintas clases:

$(+ m)$, $(- n)$, amén del símbolo para clase neutra (a,a), que adoptaremos el O.

Si definimos entre estas clases la multiplicación $\times$, según las reglas $(+ m) \times (+ n) = (+ m.n)$; $(+ m) \times (- n) = (- m.n)$; $(- m) \times \times (+ n) = (- m.n)$; $(- m) \times (- n) = (+ m.n)$, habremos estructurado un anillo conmutativo unitario —elemento unidad, el $+ 1$— sin divisores de cero, en el conjunto cociente de las parejas ordenadas de regletas respecto de la relación de equivalencia establecida, frente a la cual es estable la multiplicación así definida, como puede comprobarse mediante un sencillo cálculo, así como las demás propiedades características de la estructura anular.

Otra relación de equivalencia entre parejas ordenadas de regletas, ésta de tipo multiplicativo, nos conducirá a otra clasificación de ellas, y a otra estructura de su conjunto. Definamos la relación siguiente: $(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow a.d = b.c$, donde el producto de regletas tiene el significado anteriormente convenido, y, por tanto, $a.d$ y $b.c$ serán, pues, rectángulos de igual extensión. Esta relación, que fácilmente se comprueba es de equivalencia, comprende varios casos particulares, de inmediata constatación: 1.º) $(a.a) \sim \sim (b,b)$, cuando los dos elementos de cada pareja son intercambiables sin alteración de la pareja; 2.º) $(a,b) \sim (a',b')$, si $a = n.b, a' = n.b'$, o, respectivamente, $b = n.a$, $b' = n.a'$ (n, número natural), es decir, los elementos de las parejas escritos en primer lugar son equimúltiplos, o equidivisores, de los escritos en segundo lugar; y 3.º) $(a,b) \sim (a',b')$ cuando $a = n.a'$, $b = n.b'$, o sea, los elementos de la primera pareja son equimúltiplos de los de la segunda.

Cada una de las clases del conjunto cociente respecto de la relación de equivalencia que estamos estudiando podrá tener la representación más sencilla tomando la pareja ordenada de regletas más cortas perteneciente a la misma, o *pareja irreducible.* (Llamaremos reducir o *simplificar* una pareja ordenada, hallar otra equivalente de regletas más cortas).

Si definimos entre las parejas ordenadas de regletas una operación de multiplicar por el convenio $(a,b) \times (c,d) = (a.c,b.d)$, estable frente a esta segunda relación de equivalencia, tendremos en el conjunto cociente una estructura de grupo multiplicativo abeliano, en que el elemento neutro será la clase (a,a), y la clase simétrica de la representada por $(a.b)$ será la representada por (b,a).

Puede definirse también una nueva adición entre las parejas ordenadas: si tienen el segundo elemento común, como en (a,b) y (c,b), sea: $(a,b) + + (c,b) = (a + c,b)$; si no lo tienen, podremos siempre, usando la segunda relación de equivalencia, reducirlas a que lo tengan: —$(a,b) = (a.d, b.d)$; $(c,d) = (c.b, d.b)$— y ya estamos en el caso anterior. Dicha operación es asimismo estable respecto de la segunda relación de equivalencia; por tanto, induce en el conjunto cociente de las parejas ordenadas una adición entre clases, distinta, claro está de la adición expuesta anteriormente en el conjunto cociente respecto de la primera relación de equivalencia. Fácil es comprobar la conmutatividad, asociatividad y existencia del elemento neutro

—la clase (O,p)— ; sin embargo, por no existir elemento simétrico de cada clase, no confiere esta nueva operación estructura de grupo.

La distributividad de la multiplicación respecto de la adición en este conjunto cociente, algo más incómoda de demostrar, trae como consecuencia, junto con las demás propiedades, la constatación en él de una estructura de semicuerpo, que es precisamente isomorfo de $Q+$ de los números racionales positivos.

Vemos, pues, que trabajando casi exclusivamente con las regletas, o con parejas ordenadas de ellas, mediante relaciones y operaciones convenientemente definidas, pueden edificarse estructuras algebraicas actualmente ya en los programas de enseñanza media, concretizadas en un material muy idóneo por su multivalencia y facilidad de manejo. Es claro que esta virtualidad del material Cuisenaire es la que explica precisamente su eficacia para la enseñanza de la Aritmética, y no sólo del número natural, como ya observó su descubridor.

NOTAS.—1.ª) Los productos de tres o más regletas se materializan mediante torres de tres o más pisos de regletas cruzadas alternativamente, esquematización de los correspondientes paralelepípedos que también se resuelven, en definitiva, en trenes unicolores, a través de la descomposición intermedia en capas rectangulares.

2.ª Véase, por ejemplo, la fácil demostración de la propiedad distributiva del producto de regletas respecto de la suma:

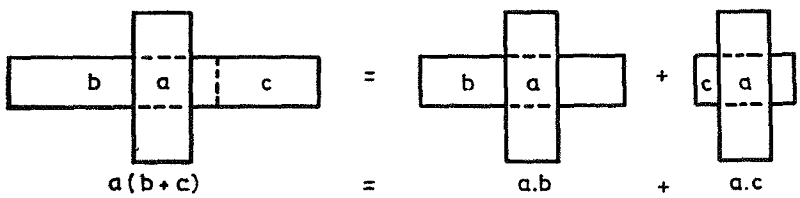

Fig. 4

(R - 10 - VII - 68)