ORIENTACION TRANSVERSAL

por

J. A. FERNÁNDEZ VIÑA

I. ORIENTACIÓN TRANSVERSAL DE LOS HIPERPLANOS VECTORIALES Y AFINES.

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n sobre el Cuerpo $\mathbf{R}$ de los números reales y sea H un subespacio vectorial de E de dimensión $n - 1$, es decir, un hiperplano de E. Sea u una forma lineal sobre E tal que $H = \operatorname{Ker} u$; a cada uno de los conjuntos $S_1 = \{\vec{x} \in E;\ u(\vec{x}) > 0\}$, $S_2 = \{\vec{x} \in E;\ u(\vec{x}) < 0\}$ le llamaremos semiespacio de E, determinado por H, toda vez que estos conjuntos son independientes de la forma lineal u que tenga por núcleo H.

Definición 1. Orientar transversalmente el hiperplano H es asociarle uno de los dos semiespacios S_1, S_2. Al semiespacio elegido se le llamará positivo y al otro, negativo. Un vector $\vec{x} \in E$ transversal respecto de H (es decir, no perteneciente a H) se dirá positivo (resp. negativo) si pertenece al semiespacio positivo (resp. negativo).

Notas.—1.ª La definición anterior se extiende al caso en que la dimensión de E no sea finita. Sin embargo, no se aplica si el cuerpo sobre el cual E es un espacio vectorial, es C.

2.ª En un trabajo anterior (publicado en esta misma Revista) hemos estudiado la orientación desde otro punto de vista y es en ese sentido como deberán ser interpretados aquí los términos orientación, orientado, etc., si no van seguidos de las palabras transversal, transversalmente, etc.

Si E está orientado, existe una relación natural entre la orientación de H, considerado como espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$, y su orientación transversal. En efecto, si H está orientado y si $\{\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_{n-1}\}$ es una base positiva, podemos asociar a H como semiespacio positivo el que contiene a los vectores transversales $\vec{h} \in E$, tales que $\{\vec{h}, \vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_{n-1}\}$

sea una base positiva de E. Recíprocamente, si H está orientado transversalmente, le asociaremos como clase positiva de sus bases ordenadas aquella a la que pertenezca una base $\{\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_{n-1}\}$ tal que si $\vec{h}$ es un vector transversal positivo, la base $\{\vec{h}, \vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_{n-1}\}$ sea positiva respecto de la orientación de E.

Sea ahora $\mathcal{E}$ un espacio afin de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbf{R}$ y $\mathcal{H}$ una variedad afin de dimensión $n - 1$, es decir, un hiperplano afin de $\mathcal{E}$. El espacio vectorial H asociado a $\mathcal{H}$ es un hiperplano del espacio vectorial E de dimensión n asociado a $\mathcal{E}$.

Definición 2. Se dirá que se ha orientado trasnversalmente $\mathcal{H}$ cuando se haya orientado transversalmente H.

En virtud de lo dicho en el párrafo anterior, si el espacio afin $\mathcal{E}$ está orientado, cada orientación de $\mathcal{H}$ determina una orientación transversal y recíprocamente.

II. Orientación transversal de una hipersuperficie.

Sea S un conjunto y supongamos que a cada elemento $x \in S$ se tiene asociado un hiperplano T_x de un espacio vectorial real E de dimensión finita.

Diremos que se ha orientado transversalmente el conjunto S cuando se hayan orientado transversalmente cada uno de los hiperplanos T_x. Para comparar dos orientaciones transversales $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ de S consideraremos la aplicación r de S en el conjunto $\{-1, 1\}$ definida por: $r(x) = 1$ (resp. -1) si las orientaciones transversales $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ coinciden (resp.s on opuestas) en T_x.

Sea $\vec{X}$ un campo de vectores transversales sobre S, es decir, una aplicación $x \to \vec{X}(x)$ de S en E, tal que $\vec{X}(x) \notin T_x$, para todo $x \in S$. Si S está transversalmente orientado podemos asociar al campo $\vec{X}$ la aplicación $t_{\vec{x}}$, de S en el conjunto $\{-1, 1\}$, definida por $t_{\vec{x}}(x) = 1$ (res.p -1) si el vector $\vec{X}(x)$ es positivo (resp. negativo) respecto de la orientación transversal de T_x.

En lo que sigue supondremos que S es un espacio topológico separado y que E está dotado de la (única) topología separada compatible con una estructura de espacio vectorial.

Definición 3. Una orientación transversal de S se dirá continua si cualquiera que sea el campo $\vec{X}$ de vectores transversales continuo sobre S, la aplicación $t_{\vec{x}}$ correspondiente, es continua.

Si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son dos orientaciones transversales continuas de S, para todo punto $x \in S$ y todo campo $\vec{X}$ continuo de vectores transversales, existirá un entorno U_x (resp. U'_x) de x en el cual $t_{\vec{x}}$ (resp. $t'_{\vec{x}}$) es constante; en el entorno $U_x \cap U'_x$ la función r será entonces constante, luego esta función es continua en S. Recíprocamente, si r y $\mathfrak{C}$ son continuas, para todo punto $x \in S$ y todo campo $\vec{X}$ existirá un entorno de x en el cual r y $t_{\vec{x}}$ serán constantes; entonces $t'_{\vec{x}}$ será constante en ese entorno y por consiguiente continua en S. Hemos demostrado, pues, el siguiente.

Teorema 1. Si dos orientaciones transversales de S son continuas, la función asociada para compararlas es continua. Si esta función y una de las orientaciones transversales son continuas, la otra orientación transversal es también continua.

Se deduce en particular que su el espacio topológico S es conexo, dos orientaciones transversales sobre S o ocincideno son opuestas.

Veamos seguidamente como, en el caso en que E sea un espacio vectorial euclídeo, la existencia de un campo continuo de vectores normales implica la existencia de una orientación transversal continua de S.

Un campo $\vec{X}$ de vectores sobre S se dice de vectores normales cuando el vector $\vec{X}(x)$ es ortogonal al hiperplano T_x, para todo $\in x$ S, es decir, cuando $(\vec{X}(x) \mid \vec{Y}) = 0$, para todo $\vec{Y} \in T_x$. (Representamos por $(\vec{A}|\vec{B})$ el producto escalar de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Recordemos, por otra parte, que la aplicación $(\vec{A}, \vec{B}) \longrightarrow (\vec{A} \mid \vec{B})$ de $E \times E$ en $\mathbf{R}$ es continua).

Teorema 2. Supongamos que existe un campo $\vec{N}$ continuo de vectores unitarios normales. Entonces para que una orientación transversal de S sea continua es necesario y suficiente que la función $t_{\vec{N}}$, correspondiente a esa orientación y al campo $\vec{N}$, sea continua.

En efecto, que la condición es necesaria se sigue evidentemente de la definición 3. Para demostrar que es suficiente consideremos un campo continuo cualquiera $\vec{X}$ de vectores transversales y probemos que la función $t_{\vec{x}}$ es continua. Sea x un punto genérico de S; el vector $\vec{X}(x)$ se puede descomponer en la forma

$$\vec{X}(x) = (\vec{X}(x) \mid \vec{N}(x))\, N(x) + \vec{Y}(x)$$

donde $\vec{Y}(x) \in Tx$. La función real $x \longrightarrow (\vec{X}_{(x)} \mid \vec{N}_{(x)})$ es continua en S y distinta de cero en todo punto S. Como

$$t_{\vec{x}}(x) = t_{\vec{N}}(x) \frac{(\vec{X}(x) \mid \vec{N}(x))}{\mid (\vec{X}(x) \mid \vec{N}(x)) \mid}$$

y $t_{\vec{N}}$ se supone continua, la función $t_{\vec{x}}$ resulta ser continua, que es lo quedeseabamos demostrar, Del teorema se sigue el resultado que anunciabamos más arriba: si existe un campo continuo de vestores unitarios normales y si para cada $x \in S$ fijamos en T_x la orientación transversal respecto de la cual el vector $\vec{N}(x)$ sea positivo, la función $t_{\vec{N}}$ correspondiente a esta orientación transversal valdrá constantemente 1, luego será continua y, por consiguiente, dicha orientación transversal será continua.

Sea $\mathcal{E}$ un espacio afin real de dimensión n y supongamos que S es una hipersuoerficie de $\mathcal{E}$, es decir, una variedad diferenciable de $\mathcal{E}$ de clase C^m, $(m \geqslant 1)$, y dimensión $n - 1$. Si a cada punto $x \in S$ le asociamos el hiperplano vectorial T_x tangente en x a S, nos encontraremos exactamente en la situación precedente. Si además, $\mathcal{E}$ es euclídeo como la hipersuficie S puede ser representada localmente por una ecuación de la forma $f(x) = 0$ donde f es una función real de clase C^m, el campo $\vec{N}(x) = \vec{\nabla} f(x) / \| \vec{\nabla} f(x) \|$ ($\vec{\nabla} f$ es el gradiente de f y la norma $\| \ \|$es la que se tenga definida en el espacio vectorial E) es un campo continuo de vectores normales; este campo se tiene definido en un cierto conjunto abierto de S, luego S es localmente transversalmente orientable.

Si la hipersuperficie S está globalmente representada por una ecuación de la forma $f(x) = 0$, con f de clase C^m, el anteriorcampo de vectores normales estará definido en S y S poseerá una orientac ión transversal continua. Este es el caso. por ejemplo, delas esferas y, en general, de las cuádricas sin punto singular.

III. Relación entre la orientación transversal y la orientación de una hipersuperficie.

Sea S una hipersuperficie de un espacio afin real de dimensión n; un campo de vectores $\vec{Y}$ sobre S, se dice tangencial si $\vec{Y}(x)$ pertenece al hiperplano tangente T_x para todo $x \in S$. Sean $\vec{Y}_1, \ldots, \vec{Y}_{n-1}$, $n - 1$ campos de vectores tangenciales independientes sobre S. Sea a un punto de S y $\Gamma(\Phi, A, U)$ una carta tal que $a \in U$. Pongamos $\vec{Z}_i(\xi) = (d\Phi(\xi)^{-1}.(\vec{Y}_i(x))$, $\xi = \Phi^{-1}(x)$, con lo cual tendremos definidos $n - 1$ campos de vectores independientes sobre el abierto A de $\mathbf{R}^{n-1}$. El signo de la base $\{\vec{Z}_1(\xi), \ldots, \vec{Z}_{n-1}(\xi)\}$ respe to de la orientación canónica de $\mathbf{R}^{n-1}$ es el signo del determinante de esos vectores respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^{n-1}$; si los campos $\vec{Y}_i$ se suponen continuos en a, los campos $\vec{Z}_i$ resultarán continuos en $\alpha = \Phi^{-1}(a)$, y el signo del citado determinante será constante en algún entorno de α. Sea $\mathcal{O}$ una orientación de S y v la función asociada a este orientación y a la carta Γ. En virtud de la definición de v, el signo de la base $\{\vec{Y}_1(x), \ldots, \vec{Y}_{n-1}(x)\}$ de T_x será el producto de $v(x)$ por el signo del determinante antes citado, de lo cual resulta que esta base tendrá un signo (respecto de $\mathcal{O}$) constante en algún entorno de a sí y sólo si la función v es constante en algún entorno de a, o sea si y sólo si la orientación $\mathcal{O}$ es continua en el punto A. (Así, pues, S es siempre localmente orientable, ya que siempre existe, en un entorno de cada punto de S, un sistema de $n - 1$ campos de vectores tangenciales continuos e independientes (véase nota); globalmente la propiedad no es cierta en general.)

TEOREMA 3. *Una hipersuperficie de un espacio afín real de diemnsión finita es continuamente orientable si y sólo si admite una orientación transversal continua; si el espacio afín está orientado, existe una correspondencia natural entre las orientaciones de la hipersuperficie y sus orientaciones transversales.*

Supongamos $\mathcal{E}$ orientado y sea $\mathcal{O}$ una orientación de S. Sea $\mathcal{Y} = \{\vec{Y}_1, \ldots, \vec{Y}_{n-1}\}$ una base positiva de T_x. Asociemos a T_x el semiespacio de vectores transversales $\vec{X}$, tales que la base $\mathcal{B} = \{\vec{X}, \vec{Y}_1, \ldots, \ldots, \vec{Y}_{n-1}\}$ sea positiva para la orientación de $\mathcal{E}$. Los vectores $\vec{X}$ se determinan así independientemente de la base positiva elegida en T_x, pues si $\mathcal{Y}' = \{\vec{Y}'_1, \ldots, \vec{Y}'_{n-1}\}$ es otra base positiva de T_x y $\mathcal{B}' = \{\vec{X}, \delta/\vec{Y}'_1 \ldots, \vec{Y}_{n-1}\}$ la base de $\mathcal{E}$ correspondiente, se tiene: det. $(\mathcal{B}, \mathcal{B}') =$ $=$ det. $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}')$; y los vectores $\vec{X}$ forman un semiespacio de los dos en que T_x divide a E, pues si $\vec{X}'$ es otro vector cualquiera de E se expresará respecto de la base $\mathcal{B}$ en la forma $\vec{X}' = \lambda\vec{X} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{Y}_i$ de suerte que si u es una forma lineal sobre E con núcleo T_x, se tendrá $u(\vec{X}') = \lambda u(\vec{X})$ y como por otra parte $\lambda =$ det. $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$, donde $\mathcal{B}_1 = \{\vec{X}', \vec{Y}_1, \ldots \vec{Y}_{n-1}\}$, resultará que $\vec{X}$ y $\vec{X}'$ pertenecen al mismo semiespacio si y sólo si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_1$ tienen el mismo signo. La orientación $\mathcal{O}$ determina, pues, una orientación transversal $\mathcal{C}$ y, mediante razonamientos análogos seprueba que, recíprocamente, toda orientación transversal $\mathcal{C}$ de S determina una orientación $\mathcal{O}$, siendo esta correspondencia inversa de la anterior.

Para cada punto $a \in$ S existe un entorno en el que se pueden definir, por una parte, un sistema de $n - 1$ campos continuos $\vec{Y}_1, \ldots, \vec{Y}_{n-1}$ de vectores tangenciales independientes y, por otra, un campo continuo $\vec{X}$ transversal (ver nota). El signo, respecto de la orientación de $\mathcal{E}$, de la base $\{\vec{X}(x), \vec{Y}_1(x), \ldots, \vec{Y}_{n-1}(x)\}$ será constante para x en un cierto entorno de a supongamos que este signo es $+$. Entonces el signo de la base $\{\vec{Y}_1(x), \ldots, \vec{Y}_{n-1}(x)\}$ respecto de $\mathcal{O}$ es el mismo que el de $\vec{X}(x)$ respecto de $\mathcal{C}$; si uno de estos signos es constante en un entorno de a, también lo será el otro, luego si $\mathcal{O}$ es continua, $\mathcal{C}$ será continua y recíprocamente.

Nota.—Para probar la existencia de los campos $\vec{Y}_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, en las condiciones citadas basta elegir una carta local $\Gamma = (\Phi, A, U)$, $a \in U$, y definir $\vec{Y}_i(x)$ por $\vec{Y}_i(x) = d\,\Phi\,(\xi)\,(e_i)$, $\xi = \Phi^{-1}(x)$, siendo $\{\vec{e}_1, \ldots$ $\ldots, \vec{e}_{n-1}\}$ la base canónica en $\mathbf{R}^{n-1}$. Para probar la existencia de $\vec{X}(x)$ basta considerar que, tomando convenientemente la referencia, la hipersuperficie S está representada, en un entorno de a, por una ecuación de la forma $x_1 = f(x_2, \ldots, x_n)$ con f de clase C^m; en ese entorno el campo constante $x \longrightarrow \vec{e}_1$ es continuo y transversal.

(R-13-XII-67)