LA NOCION DE ORIENTACION

por

J. A. FERNANDEZ VIÑA

I. Orientación de un espacio vectorial.

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo **K**. Si $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ y $B' = \{\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n\}$ son dos bases de E, llamaremos determinante de B′ respecto de B, y lo representaremos por det. (B, B′,), al determinante de la matriz $(\alpha_{i,j})$ tal que

$$\vec{e}\,'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\, \vec{e}_j \,, \; i = 1, \ldots, n \,;$$

es también el determinante de la biyección lineal L de E sobre sí mismo definida por $L(\vec{e}_i) = \vec{e}\,'_i$ y será representado igualmente por det. L. Se demuestra sin dificultad que:

(1) det. (B′ , B) = (dt. [B,B′]) $^{-1}$, det. (B,B″) = det. (B,B′) det. (B′,B″).

Llamaremos base ordenada de E a toda aplicación $j \longrightarrow \vec{e}_j$ del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ en E tal que los vectores $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ sean independientes.

Supongamos $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, cuerpo de los números reales. En el conjunto B de las bases ordenadas de E la relación ($B \rho B'$) = (det. [B, B′] > 0) es una relación de equivalencia (se comprueba aplicando [1]). El conjunto cociente B/ρ consta de dos elementos: en efecto, las bases $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ y $B' = \{-\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ pertenecen a clases de equivalencia distintas y, si B″ es otro elemento cualquiera de B, de la segunda relación de (1) se sigue que det. (B, B″) = — det. (B′, B″), luego B″ pertenece a la misma clase de equivalencia que B o a la misma que B′.

DEFINICION 1.—Llamaremos espacio vectorial (real) orientado a la pareja formada por un espacio vectorial sobre **R** y una clase de equivalencia del conjunto de sus bases ordenadas.

A partir de un espacio vectorial se pueden, pues, obtener dos espacios vectoriales orientados; se dirá también que un espacio vectorial es susceptible de recibir dos orientaciones, muchas veces se le llamará a una positiva y a la otra negativa y se hablará de bases positivas o negativas refiriéndose a las bases que pertenezcan a la clase de equivalencia que se eligió positiva o a la negativa.

Notas. — 1.ª) En el espacio vectorial $\mathbf{R}^n$, sobre $\mathbf{R}$, los vectores $\vec{e}_1 = (1,0,0, \ldots, 0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0, \ldots, 0,0), \ldots, \vec{e}_n = (0,0, \ldots, 0, 1)$ forman una base que llamaremos base canónica de $\mathbf{R}^n$. Este espacio vectorial puede ser dotado, de un modo natural, de una orientación sin más que considerar como clase positiva aquella a la que pertenezca la base canónica. Esta situación no se presenta evidentemente en un espacio vectorial cualquiera donde ninguna base podrá, en principio, distinguirse de las demás.

2.ª) Para los espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos la anterior definición de orientación no se aplica, pero nos servirá para establecer una nueva definición con la que, además, todo espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbf{C}$ poseerá una orientación canóninca. En efecto, si E es un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbf{C}$, el conjunto E queda automáticamente dotado de una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ de dimensión $2\,n$; representemos por E_0 este espacio vectorial real. Si $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base ordenada de E, es evidente que $\{\vec{e}_1, i\,\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n, i\vec{e}_n\}$ $(i^2 = -1)$ es una base ordenada de E_0. y no es difícil demostrar que la clase de equivalencia a la que pertenece esta base es independiente de la base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de partida; podemos entonces orientar canónicamente E_0 tomando esa clase como clase positiva y, si convenimos en que orientar el espacio E signifique orientar E_0 (con arreglo a la definición 1), es claro que todo espacio vectorial complejo admite una orientación canónica.

II. Orientación de las variedades afines.

Sea E un espacio afín real de dimensión finita n y sea E su espacio vectorial asociado. E es, pues, un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbf{R}$.

DEFINICION 2.—Se dirá que se ha orientado un espacio afín real cuando se haya orientado su espacio vectorial asociado.

Sea F una variedad afín de E y F el subespacio vectorial de E asociado a F. Orientar la variedad F es orientar el espacio vectorial F.

Notas.—1.ª) Si se trata de un espacio afín (o de una variedad afín de él) sobre el cuerpo $\mathbf{C}$, diremos que se le ha dado una orientación cuando se haya orientado el espacio vectorial asociado, con arreglo a la definición de la Nota 2.ª anterior.

2.ª) La noción de orientación permite atribuir un signo al volumen del paralelepípedo. Supongamos, en efecto, que E sea un espacio afín euclídeo (real) de dimensión n y sean 0 un punto de E y $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n$ n vectores independientes del espacio vectorial E asociado a E. El valor absoluto del determinante de la base $\{\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n\}$ respecto de una base ortonormal de E es independiente de esta base; es el volumen del paralelepípedo determinado por O, $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n$. Si el espacio E está orientado, se atribuirá al volumen signo + (resp. —) si la base $\{\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_n\}$ es positiva (resp. negativa).

III. Orientación de las variedades diferenciables.

Sea V un conjunto y supongamos que a cada punto $x \in V$ se tiene asociado un espacio vectorial real T_x de dimensión p. Diremos que se ha orientado el conjunto V cuando se hayan orientado cada uno de los espacios vectoriales T_x. Sean O y O' dos orientaciones de V; para compararlas consideraremos la aplicación r de V en el conjunto $\{-1, 1\}$, definida por $v(x) = 1$ (resp. -1) si las orientaciones de T_x correspondientes a O y O' coinciden (resp. son opuestas).

Definiremos a continuación lo que se entenderá por orientación continua de V. Supongamos que V sea un espacio topológico separado y que para cada $x \in V$ se da además una biyección lineal L_x de $\mathbf{R}^p$ sobre T_x. Sea B la base canónica de $\mathbf{R}^p$. Supongamos V orientado y consideremos la aplicación v de V en el espacio $\{-1, 1\}$ (dotado de la topología inducida por la habitual de $\mathbf{R}$) definida por $v(x) = 1$ (resp. -1) si la base L_x (B) de T_x es positiva (res. negativa). Entonces la orientación de V se dirá continua si la aplicación v es continua.

Como los conjuntos $\{-1\}$ y $\{1\}$ son, respectivamente, entornos de -1 y 1 en el espacio donde v toma sus valores, se tendrá:

Teorema 1.—Para que una orientación O de V sea continua es necesario y suficiente que la función v sea constante en algún entorno de cada punto de V. En particular, si V es conexo, v deberá ser constante en todo el espacio V.

Si O y O' son dos orientaciones continuas de V, para cada punto $x \in V$ existe dos entornos U_x, U'_x de x tales que, para todo $y \in U_x$ (resp. U'_x) la base L_y (B) es positiva o negativa respecto de O (resp. O'); en el entorno $U_x \cap U'_x$ las orientaciones O y O' coincidirán o serán opuestas, luego la función r asociada a ellas será constante en dicho entorno y, por consiguiente, continua en x. Recíprocamente, si r es continua y, por ejemplo, O es continua, entonces r y v son constantes en algún entorno de x, cualquiera que sea $x \in V$, luego la función v' asociada a O' será constante en dicho entorno (igual a v si r vale 1, o igual a $-v$ si r vale -1) y por consiguiente continua en V. Hemos demostrado, pues, el siguiente:

Teorema 2.—Si O y O son dos orientaciones continuas de V, la función r que las compara es continua y recíprocamente, si r y una de las orientaciones es continua, entonces la otra es también continua. En particular, si V es conexo, V admitirá a lo sumo dos orientaciones continuas.

Cuando V es una variedad diferenciable la situación es un poco más complicada a causa de que, en lugar de tenerse una biyección lineal L_x asociada a cada punto x, se tendrá una biyección para cada carta local cuya imagen recubra x.

Sea, pues, V una variedad diferenciable de clase C^m ($m \geqslant 1$) y dimensión p de un espacio afín E de dimensión finita n ($n \geqslant p$) sobre el cuerpo $\mathbf{R}$. A cada punto $x \in V$ asociemos el espacio vectorial tangente T_x (o, si se prefiere, la variedad afín tangente) que es un subespacio de dimensión p del espacio vectorial E asociado a E.

Definicion 3.—Orientar la variedad V significará orientar cada uno de los espacios vectoriales T_x.

Sea x un punto de V y $\Gamma = (\Phi, A, U)$ una carta de V cuya imagen U contiene a x. (Expliquemos la notación: A es un conjunto abierto de $\mathbf{R}^p$, U un conjunto abierto de V y Φ un homeomorfismo de A sobre U que, considerado como aplicación de A en E, es de clase C^m y su diferencial $d\,\Phi(\xi)$ en todo punto $\xi \in A$ es una aplicación lineal continua de $\mathbf{R}^p$ en E de rango constante y, por tanto, una biyección lineal de $\mathbf{R}^p$ sobre T_x, $x = \Phi(\xi)$. La aplicación $d\,\Phi(\xi)$ hace aquí el papel de la L_x del párrafo anterior, más, como el punto x pertenecerá en general a las imágenes de varias cartas, tendremos así asociada con x una familia de biyecciones lineales de $\mathbf{R}^p$ en T_x. Sean $\Gamma_1 = (\Phi_1, A_1, U_1)$ y $\Gamma_2 = (\Phi_2, A_2, U_2)$ dos cartas tales que $x \in U_1 \cap U_2$ y sean $\xi_1 = \Phi^{-1}(x) \in A_1$ y $\xi_2 = \Phi_2^{-1}(x) \in A_2$; supongamos V orientada y consideremos una base positiva de T_x. A esta base la corresponden mediante las aplicaciones $d\,\Phi_1(\xi_1)^{-1}$ y $d\,\Phi_2(\xi_2)^{-1}$ dos bases en $\mathbf{R}^p$ cuyos signos, respecto de la orientación canónica de $\mathbf{R}^p$, vendrán dados por $v_1(x)$ y $v_2(x)$, respectivamente. La biyección lineal que aplica la primera de estas bases en la segunda es $d\,\varphi(\xi_1)$, siendo $\varphi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ luego:

$$v_1(x) = v_2(x) \frac{\det.\, d\,\varphi(\xi_1)}{|\det.\, d\,\varphi(\xi_2)|}$$

Como $\det.\, d\,\varphi(\xi_1) \neq 0$ y φ es de clase C^1 de esta fórmula se sigue que si la orientación O de V es continua en x respecto de la carta Γ_1 es decir, si v_1 es constante en algún entorno de x, entonces v_2 es constante en algún entorno de x y O es continua en x respecto de la carta Γ_2. Este resultado justifica la definición siguiente:

Definicion 4.— Una orientación de V se dice continua en el punto $x \in V$ si es continua respecto de cualquier carta de V cuya imagen recubra x. Una orientación de V se dice continua si es continua en todos los puntos de V.

Llamaremos atlas orientador de V a todo atlas con la propiedad de que si Γ_1 y Γ_2 son en cartas cualquiera de él tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, se verifique que det. d $\varphi(\xi) > 0$, para todo $\xi \in \Phi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ (o, lo que es lo mismo, $v_1(x) = v_2(x)$, para todo $x \in U_1 \cap U_2$).

Teorema 3.—Para que una variedad diferenciable sea continuamente orientable (es decir, posea al menos una orientación continua) es necesario y suficiente que admita al menos un atlas orientador.

En efecto, supongamos que V está dotada de una orientación continua; si $\Gamma_1 = (\Phi_1, A_1, U_1)$ es una carta de V con A_1 conexo (lo cual siempre puede suponerse), v_1 será constante. Si $v_1 = -1$ reemplacemos esta carta por la $\Gamma_2 = (\Phi_2, A_2, U_2)$ donde: $U_2 = U_1$, $A_2 = \{(\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_p) \in \mathbf{R}^p ; (-\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_p) \in A_1\}$ y $\Phi_2 = \Phi_1 \circ \sigma$ siendo σ la aplicación $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) \longrightarrow (-\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$; es claro que $v_2 = 1$. Si imaginamos de este modo corregido, si ha lugar, un atlas de la variedad V, la función v valdrá 1 para todas las cartas del atlas y éste será orientador. Recíprocamente, supongamos que V posee un atlas orientador; entonces, si fijamos una orientación en T_x, el valor $v(x)$ no dependerá de la carta de ese atlas utilizada para recubrir x. Fijando esa orientación de modo que $v(x) = 1$, la función v es constante, luego continua, y, por consiguiente, V admite una orientación continua.

Notas.—1.ª) Las nociones anteriores se extienden al caso en que V sea una variedad diferenciable abstracta (modelada sobre espacios vectoriales de dimensión finita) no necesariamente contenida en un espacio afín.

2.ª) Si V es una variedad sobre el cuerpo $\mathbf{C}$, sus espacios vectoriales tangentes tienen una orientación canónica; a partir de este hecho puede demostrarse que V es continuamente orientable y posee una orientación canónica.

(Continuará)