PASO A COEFICIENTES CONSTANTES DE UNA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE COEFICIENTES VARIABLES, POR CAMBIO DE LA FUNCION

por

JESUS CASANOVA GONZALEZ-MATEO

La posibilidad de resolver exactamente y de manera sistemática, mediante la ecuación característica correspondiente, una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, incita a investigar la posibilidad de transformar en una ecuación de este tipo una ecuación diferencial lineal de coeficientes variables: ya sea mediante el cambio de la función, de la variable independiente o de ambas a la vez. En este artículo nos detendremos solamente en el primer caso, siendo los casos restantes materia para ulteriores artículos.

1. Lo primero que se plantea es la estructura que deberá adoptar la fórmula de transformación, para que sea también lineal la ecuación transformada. Se sabe que es condición necesaria y suficiente para la lineabilidad de una ecuación diferencial, que sea lineal respecto a las constantes de integración la solución general.

$$y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) + y_{n+1}(x) \qquad [1]$$

donde se ha supuesto de orden n la ecuación diferencial. Si

$$y = f(x, z)$$

es la fórmula de transformación, donde z representa a la nueva función, aplicada a la solución general [1] de la ecuación primitiva, la ecuación resultante

$$f(x, z) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) + y_{n+1}(x) \qquad [2]$$

da, en forma implícita, la solución general de la ecuación diferencial transformada. Y si se pretende que ésta sea también lineal, la ecuación [2] debe definir a z función lineal respecto a las constantes arbitrarias

$$C_1, \dots, C_n.$$

Es decir:

$$z = C_1 v_1 (x) + \dots + C_n v_n (x) + v_{n+1} (x) \qquad [3]$$

Identificando las derivadas de z obtenidas de las ecuaciones [2] y [3] se obtiene:

$$C_1 \frac{y'_1 (x)}{f'_z (x, z)} + \dots + C_n \frac{y'_n (x)}{f'_z (x, z)} + \frac{y'_{n+1} (x) - f'_x (x, z)}{f'_z (x, z)} \equiv$$

$$\equiv C_1 v'_1 (x) + \dots + C_n v'_n (x) + v'_{n+1} (x)$$

y de la arbitrariedad de las constantes $C_1, \dots, C_n$ se deduce:

$$\frac{y'_1 (x)}{f'_z (x, z)} \equiv v'_1 (x), \dots, \frac{y'_n (x)}{f'_z (x, z)} \equiv v'_n (x)$$

y de aquí:

$$f'_z (x, z) \equiv \frac{y'_1 (x)}{v'_1 (x)} \equiv \dots \equiv \frac{y'_n (x)}{v'_n (x)} \equiv u (x)$$

E integrando respecto a la variable z.

$$f (x, z) \equiv u (x) z + \varphi (x)$$

Recíprocamente: mediante el cambio de la función, definido por la fórmula de transformación:

$$y = u (x) z + \varphi (x)$$

una ecuación diferencial lineal se transforma en otra del mismo tipo, como es fácil de comprobar.

Resumiendo, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema: *Para que una ecuación diferencial lineal* $P(D)\, y = \psi (x)$ *se transforme en otra del mismo tipo, mediante un cambio de la función, es condición necesaria y suficiente que la fórmula de transformación adopte la forma:*

$$y = u (x) z + \varphi (x) \qquad [4]$$

2. Es fácil comprobar que la función $\varphi (x)$, que figura en la fórmula [4], solo interviene en la construcción del término independiente de z y sus derivadas en la ecuación diferencial transformada $Q(D)\, z = \Phi (x)$, pero no en la de los coeficientes de aquéllas. Y como solamente nos interesan éstos, estudiaremos únicamente el cambio, cuya fórmula es de la forma:

$$y = u (x) z \qquad [5]$$

Si la ecuación diferencial primitiva es:

$$P (D)\, y \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 (x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} +$$

$$+ \ldots . + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)\, y = \psi(x) \qquad [6]$$

sustituyendo en ella la función y y sus derivadas obtenidas de la fórmula [5].

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x) \frac{d^n z}{dx^n} + n\, u'(x) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} \ldots . ,$$

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = u(x) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots .$$

se obtiene la ecuación transformada:

$$Q(D)\, z \equiv \frac{d^n z}{dx^n} + \left(n \frac{u'(x)}{u(x)} + a_1(x) \right) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots . = \Phi(x)$$

y para que ésta sea de coeficientes constantes es necesario que:

$$n \frac{u'(x)}{u(x)} + a_1(x) \equiv \mathrm{K} \text{ (constante)}$$

O sea,

$$\frac{u'(x)}{u(x)} \equiv \frac{1}{n} (\mathrm{K} - a_1(x))$$

E integrando:

$$u(x) \equiv \mathrm{H} e^{\alpha x} e^{- \frac{1}{n} \int a_1(x)\, dx}$$

donde

$$\alpha = \frac{\mathrm{K}}{n} = \text{constante}$$

y, H = constante.

Si se pretende que la ecuación diferencia lineal transformada sea de coeficientes constantes, la fórmula de transformación [5] ha de ser, pues, de la forma:

$$y = \mathrm{H} e^{\alpha x} e^{- \frac{1}{n} \int a_1(x)\, dx} . z$$

Pero ésta es la fórmula de transformación de un cambio, equivalente a dos cambios sucesivos de la función, cuyas respectivas fórmulas son:

$$y = e^{- \frac{1}{n} \int a_1(x)\, dx} . w , \qquad w = \mathrm{H} e^{\alpha x} z \qquad [7]$$

La primera es la del conocido cambio de la función, que suprime el término en la derivada $(n - 1)$ — ésima. Y la segunda es la de un cambio que no puede transformar una ecuación diferencial lineal de coeficientes variables en otra de coeficientes constantes; ya que si así fuera, la fórmula del cambio inverso:

$$z = \frac{1}{H} e^{-\alpha x} w$$

transformaría a una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes en otra de coeficientes variables, lo cual es imposible, como es fácil comprobarlo mediante las propiedades del operador P (D) de coeficientes constantes. En efecto: la ecuación

$$P(D)\, z = \varphi(x)$$

se transformaría en la ecuación

$$P(D)\, e^{-\alpha x} w = H\, \varphi(x)$$

o sea,

$$e^{-\alpha x} P(D - \alpha)\, w = H\, \varphi(x)$$

$$P(D - \alpha)\, w = H e^{\alpha x} \varphi(x)$$

que es también de coeficientes constantes, por serlo el operador $P(D - \alpha)$.

De aquí se deduce, que la ecuación transformada de coeficientes constantes, mediante el cambio de la función, y en el caso de existir, la ha tenido que proporcionar ya el primero de los dos cambios [7].

Podemos, pues, enunciar ya el siguiente teorema:

TEOREMA: *Una ecuación diferencial lineal de orden* n *admite transformada de coeficientes constantes, mediante un cambio de la función, si y sólo si, a este tipo de ecuación conduce el cambio de la función que suprime el término en la derivada* (n — 1)-ésima.

COROLARIO: *Toda ecuación diferencial lineal de orden* n *de coeficientes variables, que carece de término en la derivada* (n — 1)-ésima, *no admite ecuación transformada de coeficientes constantes mediante un cambio de la función.*

El cambio de la función, en la ecuación [6], mediante la fórmula de transformación:

$$y = e^{-\frac{1}{n}\int a_1(x)\, dx} \cdot z = C\, e^{\alpha x} u(x)\, z$$

donde suponemos constantes a α y C, conduciría, en el caso de existir, a una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, por un razonamiento análogo al efectuado anteriormente, si y solo si a este tipo de ecuación conduce el cambio

$$y = u(x)\, z.$$

De aquí, el siguiente escolio:

Se puede suprimir todo factor de la forma $Ce^{\alpha x}$ (C y α constantes) *en la fórmula de transformación de una ecuación diferencial lineal de coeficientes variables en otra de coeficientes constantes.*

Ejemplo: Si aplicamos a la ecuación diferencial

$$\frac{d^3z}{dx^3} - 3\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} + z = e^{2x} \qquad [8]$$

El cambio de la función definido por la fórmula

$$z = x\,y \qquad [9]$$

se obtiene fácilmente la ecuación diferencial transformada:

$$x\frac{d^3y}{dx^3} - 3(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (x-6)\frac{dy}{dx} + (x+1)\,y = e^{2x} \qquad [10]$$

Se plantea, pues, el problema de resolver esta última ecuación diferencial sabiendo, o no, que admite transformada de coeficientes constantes mediante cambio de la función.

Para ello, le aplicamos el cambio de la función, definido por la fórmula:

$$y = e^{-\frac{1}{3}\int -\frac{3(x-1)}{x}dx}\,.\,z = \pm\, e^{x}\frac{1}{x}\,z \qquad [11]$$

Prescindiendo del factor ($\pm e^{x}\,ex$), le aplicamos, en definitiva, el cambio de la función dado por la fórmula más sencilla:

$$y = \frac{1}{x}\,z$$

que por ser la fórmula de transformación inversa de la [9] incidimos en la ecuación diferencial [8]. La ecuación característica de la homogénea correspondiente es:

$$P(r) = r^3 - 3r^2 + r + 1 = 0$$

que tiene las raíces 1, $1+\sqrt{2}$ y $1-\sqrt{2}$.

Y como una solución particular de la ecuación completa es

$$z_1 = \frac{e^{2x}}{P(2)} = -e^{2x}$$

Se obtiene la solución general de la ecuación transformada.

$$z = C_1e^{x} + C_2e^{(1+\sqrt{2})x} + C_3e^{(1-\sqrt{2})x} - e^{2x}$$

y sustituyendo $z = xy$, y despejando la y se obtiene la solución general de la ecuación propuesta [10].

$$y = \frac{1}{x} \left[C_1 e^x + C_2 e^{(1 + \sqrt{2})x} + C_3 e^{(1 - \sqrt{2})x} - e^{2x} \right]$$

De no haber prescindido del factor $(\pm\, e^x)$ en la fórmula del cambio [11], llegaríamos a una ecuación diferencial lineal, también de coeficientes constantes, pero sin término en la derivada

$$\frac{d^2z}{dx^2}\,.$$