UN SISTEMA DE CUADRICAS EN RELACION CON CUESTIONES DE HOMOGRAFIAS ESPACIALES

Por

ALVARO SAINZ EGUIZABAL

Es sabido que para que dos planos distintos $\alpha \wedge \alpha'$ sean perspectivos, es condición necesaria y suficiente que los puntos comunes sean dobles, lo que implica sobre la recta común $a \equiv \alpha \cap \alpha'$, como proyectividad subordinada, la identidad.

Vamos a ver lo que sucede cuando los planos $\alpha \wedge \alpha'$ no superpuestos están referidos mediante una homografía φ, en la que es doble, sin ser idéntica, la recta común. La proyectividad sobre ésta puede ser hiperbólica, parabólica o elíptica, fijándonos en especial en el primer caso, aunque el estudio que vamos a hacer vale para el segundo también. Sean M y N los puntos dobles de dicha proyectividad.

Dos rectas homólogas de $\alpha \wedge \alpha'$ (las llamaremos $r_M \wedge r'_M$ ó $r_N \wedge r'_N$) que pasan por ellos, son perspectivas, luego sus puntos homólogos determinan rectas que pasan por un punto. ¿Cuál es el lugar Φ de estos centros de perspectividad al variar esas rectas? Llamemos $\pi_M \wedge \pi_N$ a los planos determinados por $r_M \wedge r'_M$ ó $r_N \wedge r'_N$, respectivamente.

Si $r \wedge r'$ son dos rectas homólogas en φ, que no pasan ni por M ni por N, ellas cortarán a la recta común $\underline{a}$ en dos puntos homólogos R $\wedge$ R' de la proyectividad sobre $\underline{a}$. Como $r \overline{\wedge} r'$ son dos rectas que se cruzan, las rectas que unen sobre ellas sus puntos homólogos determinan una cuádrica reglada σ no degenerada, y el conjunto de éstas ∞^2 cuádricas constituyen un sistema que denominaremos Ω.

Una cuádrica del sistema está caracterizada, pues, por tener dos directrices en $\alpha \wedge \alpha'$, homólogas en la proyectividad supuesta, siendo sus generatrices las rectas que unen puntos homólogos de dicha proyectividad. Entre estas generatrices se encuentra la recta $a \equiv \alpha \cap \alpha'$ que, por tanto, pertenece a todas ellas.

Veamos a continuación algunas propiedades interesantes de las cuádricas de este sistema.

1.ª *Los planos* $\pi_M \wedge \pi_N$ *son tangentes a todas las cuádricas de* Ω.

En efecto: las rectas homólogas $r_M \wedge r'_M$, por ejemplo, que determinan π_M, cortan a las directrices $r \wedge r'$, que definen a una cualquiera de las cuádricas σ, en los puntos R $\wedge$ R′, homólogos en las proyectividad, y por tanto, la recta RR', que pertenece a π_M, es una generatriz de σ.

2.ª *Los centros de perspectividad pertenecen a todas las cuádricas.*

Si $\pi_{M,P}$ es el plano que determina al centro P, cada cuadrica de Ω tiene una generatriz en $\pi_{M,P}$, la cual, en virtud de la perspectividad, pasa por P; luego este punto pertenece a Ω.

3.ª Recíprocamente, *todo punto común a las cuádricas* Ω *es centro de perspectividad.*

Si P es un punto común a todas Ω, y σ_1 y σ_2 son dos de ellas, por P pasa una generatriz de cada una, las cuales cortan a $\alpha \wedge \alpha'$ en dos parejas de puntos homólogos R $\wedge$ R′; S $\wedge$ S′. Las rectas RS y R′S′ homólogas están en un plano, luego pasan por uno de los puntos dobles de a. Estas dos rectas determinan el plano tangente que tiene a P por centro de perspectividad.

4.ª *Dos cuádricas tienen comun,* ademas de la generatiz $a \equiv \alpha \cap \alpha'$ *la generatriz determinada por los puntos de interseccion de las dos directrices de ambas, contenidas en* $\alpha \wedge \alpha'$, puntos que son homólogos en la proyectividad generadoras de las cuádricas.

5.ª *Si es hiperbólica la proyectividad subordinada sobre* $a \equiv \alpha \cap \alpha'$, *los centros de perspectividad sobre cada generatriz son distintos.*

Supongamos que existe una generatriz RR′, en la que P fuera el unico centro de perspectividad; los planos $\pi_{M,P} \wedge \pi_{N,P}$ determinados por RR′ y los dobles sobre a son tangentes a las cuádricas Ω y las generatrices contenidas en ellos pasan todas por P. Sea σ una cuádrica que contiene a la generatriz PSS′, distinta de la PRR′ y contenida en $\pi_{M,P}$; el plano $\pi_{N,P}$ es tangente a σ y, por tanto, una generatriz de σ, distinta de la SS′ estará contenida en $\pi_{N,P}$, lo que es absurdo, pues por cada punto de una cuádrica no degenerada no pasa mas que una sola generatriz.

6.ª *Si la proyectividad sobre* a *es hiperbolica, el lugar de los centros de perspectividad está constituido por dos directrices, comunes a todas las cuadricas del sistema.*

Hemos visto antes que dos cuádricas de la familia tienen comun la generatriz a y otra variable que unirá dos puntos homólogos de la proyectividad entre los planos de partida. La intersección restante, que, según las propiedades 2.ª y 3.ª, la determinan los centros de perspectividad, será una cónica o dos directrices. El primer caso no puede presentarse, pues según la propiedad 5.ª todas las rectas que unen puntos homólogos de $\alpha \wedge \alpha'$ cortan a ese lugar en dos puntos. Así, pues. el lugar de los centros de perspectividad de dos planos distintos, con recta común doble, sin ser idéntica, está constituido por dos rectas que se cruzan y son directrices de la familia de cuádricas engendrada por la proyectividad.

7.ª *Las directrices lugar pasan por los puntos dobles* M $\wedge$ N *de la proyectividad sobre* a.

Si una de ellas, p, cortase a la recta a, en un punto T distinto de los M $\wedge$ N, por ese punto y su homólogo T′ pasan dos rectas $l \wedge l'$ homólogas que engendran una cuádrica, y por el punto T pasan dos directrices de la misma: la p y la l, lo que es absurdo.

Resulta de este teorema que:

8.ª *Los centros de perspectividad son los puntos de contacto de las regladas con los planos tangentes que contienen a la directriz comun*

Del estudio realizado se desprende que las cuadricas Ω tienen comun todas ellas dos directrices y una generatriz. Las que contengan otra generatriz —recta que une dos puntos homólogas en la proyectividad generadora— pertenecen a un haz de regladas que contienen una generatriz en cada plano de los que pasan por las directrices comunes. Por tanto:

9.ª *El sistema de las Ω cuadricas regladas pueden distribuirse en otro sistema de ∞^1 haces caracterizados por las dos directrices y la generatriz, comunes a todos ellos, más, para cada uno, una de las infinitas generatrices del haz P en cualquiera de los planos que pasan por una de las directrices comunes.*

Vamos a ver algunas aplicaciones de estos resultados a las homografias espaciales de un numero infinito o finito de puntos dobles reales.

En una homografia biaxial hiperbólica (o parabólica), las rectas que unen puntos homologos son dobles y por apoyarse en los ejes (o eje) resultan ser éstos el lugar de los centros de perspectividad de los planes homólogos que pasan por las rectas dobles. Cualquiera que sea la pareja de éstos que pasan por una recta doble el sistema de cuadricas Ω es unico y el conjunto de las ∞^3 cuadricas a que dan lugar todas las rectas dobles tienen como directrices comunes a los ejes.

Recíprocamente, del estudio realizado en la primera parte de este trabajo resulta como consecuencia interesante que «*Una homografia biaxial hiperbólica (o parabólica) queda determinada por una pareja de planos proyectivos, cuya recta común sea doble con proyectividad* subordinada, bien hiperbólica, bien parabólica».

Los ejes de dicha homografía son las directrices del sistema Ω.

Cuando es finito el número de puntos dobles reales, consideraremos el caso de cuatro, M, N, P, Q. Las rectas MN y PQ tienen que cruzarse y las únicas dobles de la homgrafía son las seis del tetraedro que determinan. Las caras del mismo son los unicos planos dobles de la proyectividad entre los espacios. Dos planos homólogos que pasen por MN, por ejemplo, determinan una familia Ω y por ser generatriz de todas las cuadricas, la recta PQ, los ejes de perspectividad pasan por M y N, y se apoyan en PQ.

Por tanto, el lugar de todos ellos al variar los planos homólogos por MN, está constituido por dos haces de rectas situados en los planos MPQ y NPQ.

Análogamente para los otros sistemas Ω generados por las restantes rectas dobles.

Por último, si la proyectividad φ entre los planos α A α^1, subordina sobre la recta común $a \equiv \alpha \cap \alpha^1$, supuesta doble, otra correspondencia de tipo elíptico, también φ define en el espacio proyectivo real una homografía biaxial elíptica $\varnothing$, en la cual α A α^1 se corresponden junto con la homografía en ellos establecida.

En efecto, las ∞^2 rectas que unen parejas A A′; B B′; etc. de puntos homólogos situados en α A α^1, se cruzan dos a dos, pues si dos de ellas MM′, NN′, estuvieran en un plano las rectas MN A M′ N′ que se corresponden en φ, se cortarían sobre $R \in a$ y este punto sería doble, lo que va contra la hipótesis de ser elíptica la proyectividad sobre dicha recta.

Por cada punto del espacio pasa una y sólo una recta del sistema. En efecto, si $P \in \alpha$, entonces su homólogo $P' \in' \alpha'$, y la recta P P′ es la única que cumple dicha condición. Si P está fuera de α o α^1, consideremos la perspectividad σ entre estos planos, cuyo centro es P. El producto $\varphi\ \sigma^{-1}$ es una proyectividad sobre α, que tiene por lo menos un punto, S, doble, el cual, con su homólogo S′, dan la recta S S′ del sistema que pasa por P; y esta es unica por lo dicho en el párrafo segundo.

Analogamente, *cada plano del espacio contiene una y solo una recta del sistema.* Si el plano considerado es el α o el α', dicha recta es la comun; si se trata de otro cualquiera γ, éste cortara a los de partida en dos rectas: m A n' que concurren en un punto $R \in a$; por el homólogo R′ de R en φ pasan las dos rectas, imagen una: m', y original la otra: n, de las anteriores, luego la recta que originan los puntos homólogos $T \equiv m \cap n$ A $T' \equiv m' \cap n'$, pertenece a γ. De todo lo dicho, se deduce que EL CONJUNTO DE LAS ∞^2 RECTAS QUE DETERMINAN LOS PUNTOS HOMOLOGOS DE α A α^1, CONSTITUYEN UNA CONGRUENCIA LINEAL DE PRIMER ORDEN Y DE PRIMERA CLASE. Pero es sabido que una congruencia de este tipo define en el espacio proyectivo dos rectas imaginarias conjugadas de segunda especie, que son los ejes de una homografía biaxial elíptica que, con la proyectividad sobre a, queda perfectamente definida.

Resumiendo, podemos decir que:

UNA PROYECTIVIDAD ENTRE DOS PLANOS DISTINTOS α A α^1, PARA LA CUAL LA RECTA $a \equiv \alpha \cap \alpha^1$ SEA DOBLE SIN SER IDENTICA, VIENE SUBORDINADA A UNA HOMOGRAFÍA BIAXIAL DEL ESPACIO DE LA MISMA NATURALEZA QUE LA PROYECTIVIDAD SOBRE LA RECTA COMÚN.