CLASIFICACIONES EN CONJUNTOS FINITOS
Y
CONTINUACION DE UNA PEQUEÑA HISTORIA

por

JULIO GARCIA PRADILLO

Al explicar hace unos meses a los alumnos de Preuniversitario los conceptos de PARTICION DE UN CONJUNTO y CLASIFICACION DE LOS ELEMENTOS DE UN CONJUNTO me planteé a mí mismo la siguiente pregunta:

«¿Cuántas clasificaciones distintas se podrán hacer de los elementos de un conjunto finito?»

Ello me hizo recordar que a esta cuestión aludía en un artículo suyo, publicado en la *Gaceta Matemática* hace unos años, nuestro buen amigo y compañero Norberto Cuesta Dutari. De ese trabajo titulado «ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS DE LAS FRACCIONES» (*Gaceta Matemática* números 3 y 4 de 1963), me permito reproducir el siguiente párrafo:

«Un problema interesante relativo a las clasificaciones consiste en averiguar las que se pueden hacer sobre cierto número (finito o infinito) de objetos, pues evidentemente, sobre conjuntos con el mismo número cardinal, se pueden hacer las mismas. Las dos clasificaciones extremas son la gregaria, en la que todos los elementos son de la misma clase, y la polarmente opuesta, que a mi me gusta llamar angélica, en que cada elemento es único en su clase.»

El contenido de este párrafo hace presumir que la cuestión que plantea mi pregunta habrá sido ya resuelta. Sin embargo, me ha parecido conveniente publicar las conclusiones a las que he llegado al respecto.

Recordemos que se dice que se ha hecho una PARTICION DE UN CONJUNTO o una CLASIFICACION DE SUS ELEMENTOS cuando se han distribuido todos sus elementos en uno o varios subconjuntos, no vacíos y disjuntos, que son a la vez PARTES del conjunto y CLASES de sus elementos.

Designaré por K_n el número de clasificaciones distintas que se puede hacer en un conjunto de n elementos, y por $K_{n,m}$ el número de ellas en las que hay m clases.

Formemos las de los conjuntos $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$:

$\{a\}$
$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$
$\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\} = \{a, c\} \cup \{b\} = \{b, c\} \cup \{a\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$

Para estos casos tenemos:

$K_1 = K_{1,1} = 1$, $K_2 = 2$, $K_{2,1} = K_{2,2} = 1$, $K_3 = 5$, $K_{3,1} = K_{3,3} = 1$,
, $K_{3,2} = 3$

Pero sin necesidad de formarlas de hecho podemos hallar su número (por lo menos para valores pequeños de n). Así es fácil ver que:

$$K_1 = \binom{1}{1} = 1$$

$$K_2 = \binom{2}{2} + \frac{1}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

$$K_3 = \binom{3}{3} + \binom{3}{2}\binom{1}{1} + \frac{1}{6}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$K_4 = \binom{4}{4} + \left[\binom{4}{3}\binom{1}{1} + \frac{1}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}\right] + \frac{1}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} +$$
$$+ \frac{1}{24}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$$

$$K_5 = \binom{5}{5} + \left[\binom{5}{4}\binom{1}{1} + \binom{5}{3}\binom{2}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1} +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}\right] + \binom{5}{2} + 1 = 1+15+25+10+1=52$$

$$K_6 = \binom{6}{6} + \left[\binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \frac{1}{2}\binom{6}{3}\right] + \left[\binom{6}{4} + \binom{6}{3}\binom{3}{2} +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\right] + \binom{6}{2} + 1 = 1+31+90+65+15+1=203$$

Como la cuestión se complica, como es natural al crecer n, veamos si es fácil encontrar una fórmula general:

Supuestas formadas todas las clasificaciones posibles en un conjunto de n-1 elementos ¿Cómo podremos formar todas las clasificaciones posibles en el conjunto que resulta de agregarle un elemento?

De una de las antiguas clasificaciones obtenemos una nueva añadiendo un elemento a alguna de las clases, o añadiendo una nueva clase formada por el elemento nuevo. Si llamamos K'_n a las obtenidas de la primera forma y K''_n a las de la segunda, se verifica

$$K_n = K'_n + K''_n$$

y $K''_n = K_{n-1}$, puesto que de cada clasificación antigua obtenemos una nueva con una clase más. Por otra parte,

$$K'_n = K_{n-1,1} + 2\,K_{n-1,2} + \ldots + (n-1)\,K_{n-1,n-1} = \sum_{i=1}^{i=n-1} i\,K_{n-1,i}$$

de donde

$$\boxed{K_n = K_{n-1} + \sum_{i=1}^{i=n-1} i\,K_{n-1,i}} \qquad (1)$$

Parece, pues, conveniente tratar de buscar una expresión para $K_{n,m}$.

Se tiene

$$\boxed{K_{n,m} = K_{n-1,m-1} + m\,K_{n-1,m}} \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta esta ley de recurrencia, y que $K_{n,m} = 0$ para $m > n$, y que $K_{n,1} = K_{n,n} = 1$, podemos formar fácilmente la siguiente tabla.

K_n	$K_{n,m}$ m / n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	3	1	3	1	0	0	0	0	0	0
15	4	1	7	6	1	0	0	0	0	0
52	5	1	15	25	10	1	0	0	0	0
203	6	1	31	90	65	15	1	0	0	0
877	7	1	63	301	350	140	21	1	0	0
4140	8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0
21147	9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Observando esta tabla parece que en la columna correspondiente a $m = 2$ cada término es igual al duplo del anterior más uno, y así es ya que la fórmula (2) para $m = 2$ nos da

$$K_{n,2} = K_{n-1,1} + 2\ K_{n-1,2}$$

y como

$$K_{n-1,1} = 1$$

$$\boxed{K_{n,2} = 2\,K_{n-1,2} + 1} \qquad (3)$$

De ésta deducimos

$$K_{n,2} + 1 = 2\,(K_{n-1,2} + 1)$$

y como

$$K_{2,2} = 1 \qquad K_{n,2} + 1 = 2^{n-1}$$

y

$$\boxed{K_{n,2} = 2^{n-1} - 1} \tag{4}$$

A esta misma fórmula (4) podríamos haber llegado aplicando a (3) la teoría de ecuaciones en diferencias finitas lineales. $K_{n,2}$ habría de ser de la forma

$$K_{n,2} = A.\,2^n + B$$

y como

$$K_{1,2} = 0 \text{ y } K_{2,2} = 1$$

$$\left.\begin{matrix} 2A + B = 0 \\ 4A + B = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} A = 1/2 \\ B = -1 \end{matrix}$$

luego

$$K_{n,2} = 2^{n-1} - 1$$

como habíamos obtenido antes.

También, y acaso sea el procedimiento más sencillo, podíamos llegar a la fórmula (4), teniendo en cuenta que en cada clasificación del conjunto considerado en dos clases intervienen dos subconjuntos de él en sentido estricto (es decir, excluido el conjunto completo y el conjunto vacío), por lo que

$$K_{n,2} = \frac{\text{Número de subconjuntos en sentido estricto}}{2} =$$

$$= \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

Para $m = 3$ deducimos de (2)

$$K_{n,3} = K_{n-1,2} + 3\ K_{n-1,3}$$

y teniendo en cuenta el valor de $K_{n-1,2}$

$$\boxed{K_{n,3} - 3\ K_{n-1,3} = 2^{n-2} - 1} \tag{5}$$

por lo que $K_{n,3}$ será de la forma

$$A.3^n + B\,.\,2^n + C$$

y como

$$K_{1,3} = K_{2,3} = 0 \quad \text{y} \quad K_{3,3} = 1$$

resulta

$$A = 1/6 \ , \ B = -1/2 \ , \ C = 1/2$$

y

$$\boxed{K_{n,3} = \frac{1}{6} 3^n - \frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2}} \qquad (6)$$

Análogamente podemos obtener:

$$\boxed{K_{n,4} = \frac{1}{24} 4^n - \frac{1}{6} 3^n + 2^n - \frac{1}{6}} \qquad (7)$$

$$\boxed{K_{n,5} = \frac{1}{120} 5^n - \frac{1}{24} 4^n + \frac{1}{12} 3^n - \frac{1}{12} 2^n + \frac{1}{24}} \qquad (8)$$

Sería fácil ver que $K_{n,m}$ tiene que ser de la forma

$$\sum_{i=1}^{i=m} A_i \, i^n$$

pero precisamente el cálculo de $K_{n,m}$ nos llevará a incidir en nuestro artículo anterior «Aplicaciones exhaustivas, variaciones con repetición y diferencias finitas o pequeña historia de un problema olímpico» y justificará la segunda parte del título de éste» ... y continuación de una pequeña historia».

Efectivamente, la obtención de una fórmula que nos dé $K_{n,m}$ podemos hacerla de la siguiente manera:

En nuestro artículo anterior habíamos obtenido la fórmula

$$\boxed{E_{n,m} = \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^m} \qquad (9)$$

en la que $E_{n,m}$ designa el número de aplicaciones exhaustivas de un conjunto de n elementos en otro de m. Pues bien, como por otra parte todas esas aplicaciones exhaustivas pueden obtenerse haciendo todas las clasificaciones posibles del conjunto de n elementos en m clases y ordenándolas de todas las maneras posibles, resulta que

$$\boxed{E_{n,m} = K_{n,m} \cdot P_m} \tag{10}$$

y

$$\boxed{K_{n,m} = \frac{E_{n,m}}{m!}} \tag{11}$$

y teniendo en cuenta (9)

$$\boxed{K_{n,m} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(-1)^{m-i}}{m!} \cdot \binom{m}{i} i^m} \tag{12}$$

Dando a m los valores 2, 3, 4 y 5, recaemos en las fórmulas (5), (6), (7) y (8), y

$$\boxed{K_n = \sum_{m=1}^{m=n} K_{n,m} = \sum_{m=1}^{m=n} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(-1)^{m-i}}{m!} \binom{m}{i} i^m} \tag{13}$$

o

$$\boxed{K_{n,m} = \frac{\Delta^m (0^n)}{m!}} \tag{14}$$

y

$$\boxed{K_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta^i (0^n)}{i!}} \tag{15}$$

Apliquemos, por ejemplo, la fórmula (15) al caso en que $n = 6$.

Obtenidas las diferencias necesarias de las potencias sextas de los números naturales

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 64 & & 729 & & 4096 & & 15625 & & 46656 \\
& 1 & & 63 & & 665 & & 3367 & & 11529 & & 31031 & \\
& & 62 & & 602 & & 2702 & & 8162 & & 19502 & & \\
& & & 540 & & 2100 & & 5460 & & 11340 & & & \\
& & & & 1560 & & 3360 & & 5880 & & & & \\
& & & & & 1800 & & 2520 & & & & & \\
& & & & & & 720 & & & & & &
\end{array}$$

resulta

$$K_6 = 1 + \frac{62}{2} + \frac{540}{6} + \frac{1560}{24} + \frac{1800}{120} + \frac{720}{720} =$$

$$= 1 + 31 + 90 + 65 + 15 + 1 = 203$$

como ya habíamos obtenido en la tabla

. . . .

Observando los valores de «la primera paralela» a la diagonal principal en la tabla de valores de $K_{n,m}$: 1, 3, 6, 10, etc., que son, respectivamente, $K_{2,1}$, $K_{3,2}$, $K_{4,3}$, $K_{5,4}$, etc., parece inducirse que forman una progresión aritmética de orden dos, y así es ya que de la fórmula (2) deducimos

$$K_{n,n-1} = K_{n-1,\, n-2} + (n - 1)\, K_{n-1,\, n-1}$$

y siendo

$$K_{n-1,\, n-1} = 1$$

$$K_{n,n-1} - K_{n-1,\, n-2} = n - 1$$

Formadas las diferencias de

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & 3 & & 6 & & 10 \\
& 2 & & 3 & & 4 & \\
& & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

resulta

$$K_{n,n-1} = 1 + \binom{n-2}{1} 2 + \binom{n-2}{2} 1$$

o

$$\boxed{K_{n,n-1} = \frac{n^2 - n}{2}} \qquad (16)$$

A esta fórmula podíamos haber llegado también, y más fácilmente, pensando que una de tales clasificaciones queda determinada en cuanto elegimos la clase que ha de tener dos elementos, por lo que

$$K_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

....

La fórmula (10) nos permite resolver de otra manera el problema de la Olimpiada Matemática objeto de nuestro artículo anterior:

¿De cuántas maneras pueden distribuirse siete juguetes entre cinco niños, de modo que a cada niño le corresponda, por lo menos, un juguete?

Según vimos ese número es $E_{7,5}$ y como según la tabla adjunta $K_{7,5} = 140$, el número de maneras es $140 \, . \, 120 = 16800$ como ya vimos.

....

La misma fórmula (10) nos permite obtener de manera más sencilla la tabla de valor de $E_{n,m}$ que incluimos en nuestro artículo antedicho, multiplicando los números de la tabla de valores de $K_{n,m}$ por los siguientes números: los de la primera columna por 1, los de la segunda por 2!, los de la tercera por 3!, y en general los de la i^a por $i!$

....

Por lo demás, de las fórmulas (2) y (10) deducimos

$$\frac{E_{n,m}}{m!} = \frac{E_{n-1\,,\,m-1}}{(m-1)!} + m\,\frac{E_{n-1\,,\,m}}{m!}$$

y en definitiva

$$\boxed{E_{n,m} = (E_{n-1\,,\,m-1} + E_{n-1\,,\,m})\, m} \qquad (17)$$

que nos permite también un cálculo recurrente sencillo de los valores de $E_{n,m}$.