FÓRMULA DE CORIOLIS EN LOS MOVIMIENTOS RELATIVOS

Por

M. SÁNCHEZ LÓPEZ

Un movimiento, como es sabido, consiste en una transforamción lineal, que conserva las distancias, los angulos y su sentido —isometría conforme y acorde— y como tal, viene representado por una matriz apropiada.

Refiriéndonos a los giros o rotaciones $G_0\varphi$ de amplitud φ, eje de giro Ω —de cosenos directores : a,b,c— incidente con el origen O, y sentido de avance de un tornillo a derechas, se sabe que la ecuación matricial representativa de la aplicación

$$P \xrightarrow{G_0\varphi} P'$$

viene dada por

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi + a^2(1 - \cos\varphi) & a\,b(1 - \cos\varphi) - c\,\mathrm{sen}\,\varphi & a\,c(1 - \cos\varphi) + b\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ a\,b(1 - \cos\varphi) + c\,\mathrm{sen}\,\varphi & \cos\varphi + b^2(1 - \cos\varphi) & b\,c(1 - \cos\varphi) - a\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ a\,c(1 - \cos\varphi) - b\,\mathrm{sen}\,\varphi & b\,c(1 - \cos\varphi) + a\,\mathrm{sen}\,\varphi & \cos\varphi + c^2(1 - \cos\varphi) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$$o' \quad P'_A = G\,P_A \quad (1)$$

poniendo de manifiesto que las coordenadas de los puntos P y P′ están tomadas en el sistema A, considerado como fijo.

Sean ahora A y B dos sistemas de referencia ortogonales y de unitarios:

$$A = \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{vmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{vmatrix}$$

coincidentes en el inicio del movimiento de manera que el sistema A lo consideremos como fijo y al B —transformado del A por el giro G— como móvil.

Se tiene de (1) trasponiendo

$$P'^{T}_{A} = P^{T}_{A}\, G_{T} \qquad \text{y en forma vectorial} \qquad P'^{T}_{A}\, A = P^{T}_{A}\, G_{T}\, A \tag{2}$$

donde

$$P'^{T}_{A}\, A = \left| x'\ y'\ z' \right| \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix} = x'i + y'j + z'k$$

es el vector posición de P′, o sea, OP′ referido al sistema A.

Se puede escribir (2) entonces:

$$OP'_{A} = P^{T}_{A}\, G_{T}\, A \tag{3}$$

Tomando ahora, en esta ecuación, como puntos P^{T}_{A}, los correspondientes a los extremos de los unitarios:

$$i(1,0,0),\ j(0,1,0),\ k(0,0,1)$$

se tiene para el sistema B considerado como móvil:

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = \left| 1,\ 0,\ 0 \right| G_T\, A \\ j_1 = \left| 0,\ 1,\ 1 \right| G_T\, A \\ k_1 = \left| 0,\ 0,\ 1 \right| G_T\, A \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{que se puede escribir, más brevemente} \\ B = I\, G_T\, A = G_T\, A \end{array} \tag{4}$$

relación fundamental, que liga las ternas de ambos sistemas de referencia.

Con estos antecedentes, sea P un punto genérico, cuyo vector posición OP —definidor de su trayectoria— referido al sistema móvil B, vendrá dado por

$$OP_B = \left| x_1\ y_1\ z_1 \right| \begin{vmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{vmatrix} = P^{T}_{B} \cdot B$$

y referido al sistema absoluto A, por

$$OP_A = P^{T}_{B} \cdot G_T\, A \qquad \text{según se deduce de (4)}$$

La velocidad absoluta del punto P —esto es, la derivada respecto del tiempo del vector posición OP— será referida al sistema A

$$\dot{\overline{OP}}_A = \dot{P}^{T}_{B}\ G_T\, A + P^{T}_{B}\, \dot{\overline{G}}_T\, A$$

y refiriendo al sistema B, el segundo miembro:

$$\dot{\overline{OP}}_A = \dot{P}^{T}_{B}\, B + P^{T}_{B}\, \dot{G}_T \,.\, G_{-T}\, B = P^{T}_{B}\, B + P^{T}_{B}\, \dot{G}_T\, G\, B \tag{5}$$

teniendo en cuenta la conocida ortogonalidad de G, que supone $G^T = G^{-1}$

Efectuando el cálculo $\dot{G}_T\, G$ se tiene

$$\dot{G}_T\, G = \dot{\varphi} \begin{vmatrix} -\operatorname{sen}\varphi + a^2 \operatorname{sen}\varphi & a\, b \operatorname{sen}\varphi + c \cos\varphi & a\, c \operatorname{sen}\varphi - b \cos\varphi \\ a\, b \operatorname{sen}\varphi - c \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi + b^2 \operatorname{sen}\varphi & b\, c \operatorname{sen}\varphi + a \cos\varphi \\ a\, c \operatorname{sen}\varphi + b \cos\varphi & b\, c \operatorname{sen}\varphi - a \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi + c^2 \operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \cos\varphi + a^2(1 - \cos\varphi) & a\,b(1 - \cos\varphi) - c\,\text{sen}\varphi & a\,c(1 - \cos\varphi) + b\,\text{sen}\varphi \\ a\,b(1 - \cos\varphi) + c\,\text{sen}\varphi & \cos\varphi + b^2(1 - \cos\varphi) & bc(1 - \cos\varphi) - a\,\text{sen}\varphi \\ a\,c(1 - \cos\varphi) - b\,\text{sen}\varphi & b\,c(1 - \cos\varphi) + a\,\text{sen}\varphi & \cos\varphi + c^2(1 - \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \dot{\varphi} \begin{vmatrix} o & c & -b \\ -c & o & a \\ b & -a & o \end{vmatrix}$$

y finalmente

$$P_{B^T} \dot{G}_T\, G\, B = \dot{\varphi}\, |\, x_1\, y_1\, z_1\, | \begin{vmatrix} o & c & -b \\ -c & o & a \\ b & -a & o \end{vmatrix} B = \dot{\varphi} \begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \omega \times r$$

indicando con r, el vector posición del punto P referido al sistema móvil B; y ω, el vector axial representativo del giro: módulo, la velocidad angular $\dot{\varphi}$, dirección, la del eje del giro Ω, de cosenos directores a, b, c y sentido, el ya indicado del tornillo a derechas.

En resumen, se tiene de (5), la fórmula fundamental de Coriolis:

$$V_A = V_B + \omega_B \times r_B$$