HIPOPEDA CILINDRICA

Por

Leo Barsotti e Jayme Machado Cardoso

1. A hipopeda de Eudóxio é a curva interseção de um cilindro de revolução com uma esfera cujo centro pertence a uma geratriz do cilindro, tendo para raio o diâmetro da seção reta do cilindro [1].

Em [1] o Prof. Mendel Coifman construiu uma curva, por êle denominada *hipopeda cilindrica*, da qual a hipopeda de Eudóxio é caso particular.

O objetivo desta nota é demonstrar analiticamente as propriedades da hipopeda cilíndrica apresentadas em [1].

2. Consideremos a curva do plano yz de equação

$$z = -\frac{a}{2}\cos\frac{y}{2r} \qquad (0 \leqslant y < 4r\pi) \tag{1}$$

e o cilindro de equação

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0 \tag{2}$$

limitado pelos planos $z = a/2$ e $z = -a/2$.

As equações paramétricas que se obtêm da (1) por enrolamento do plano yz no cilindro (2) são

$$x = r \cdot \operatorname{sen}\frac{t}{r}$$

$$y = r + r \cdot \cos\frac{t}{r} \qquad (0 \leqslant t < 4r\pi)$$

$$z = -\frac{a}{2}\cos\frac{t}{2r}$$

---

(1) Ver, p. ex., [2] p. 324.

ou, fazendo-se $t/r = 2\theta$,

$$x = r \cdot \text{sen } 2\theta$$
$$y = 2r \cdot \cos^2\theta \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi \tag{3}$$
$$z = -\frac{a}{2} \cos \theta.$$

Tal é a curva denominada hipopeda cilíndrica pelo Prof. Coifman.

A curva pode ser obtida como interseção do cilindro (2) com o cone de vértice na origem

$$\frac{x^2 + y^2}{4r^2} - \frac{4z^2}{a^2} = 0 \tag{4}$$

ou, como interseção do mesmo cilindro com o elipsóide de revolução

$$\frac{(x - 2r)^2 + y^2}{4r^2} + \frac{4z^2}{a^2} = 1 \tag{5}$$

Em particular, se $a = 2r$, o elipsóide se reduz a uma esfera e obtemos a hipopeda de Eudóxio.

O plano xz é tangente ao cilindro (2) e ao elipsóide (5) na origem. A origem é, pois, ponto duplo da hipopeda, que corresponde aos valôres $\pi/2$ e $3\pi/2$ do parâmetro θ das (3).

3. *Teorema 1.*—O lugar dos pontos comuns às tangentes a hipopeda e ao plano conduzido pelo ponto duplo e perpendicular às arestas do cilindro é a cissóide de Diocles.

Demonstração. O vector

$$P' = 2r \cdot \cos 2\theta\bar{i} - 2r \cdot \text{sen } 2\theta\bar{j} + \frac{a}{2} \text{sen } \theta\bar{k} \tag{6}$$

é tangente à hipopeda.

A desenvolvível tangencial da hipopeda tem para equação vectorial

$$M = P + t \cdot P'$$

Nos pontos da desenvolvível situados no plano xy temos

$$-\frac{a}{2} \cos \theta + t \cdot \frac{a}{2} \cdot \text{sen } \theta = 0$$

donde

$$t = \text{cotg } \theta$$

Os coeficientes de $\bar{i}$ e $\bar{j}$ fornecem as equações paramétricas da interseção da desenvolvível com o plano xy,

$$x = 2r \cdot \text{cotg } \theta \cdot \cos 2\theta + r \cdot \text{sen } 2\theta$$
$$y = -2r \cdot \text{cotg } \theta \cdot \text{sen } 2\theta + r(1 + \cos 2\theta)$$

donde

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = 4r^2 \frac{\cos^4\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

ou seja,

$$= 2r \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{7}$$

equação polar da cissóide, c. q. d.

Teorema 2. A projeção cilíndrica da hipopeda, sôbre um plano perpendicular às geratrizes do cilindro, segundo uma direção que forma com essas geratrizes ângulo igual ao formado pela tangente à curva no ponto duplo, é um trifólio oblíquo.

Demonstração. No ponto duplo ($\theta = \pi/2$), da (6) tem-se

$$P'(\pi/2) = -2r \cdot \overline{i} + \frac{a}{2}\overline{k}$$

As retas que formam com o eixo z ângulo igual ao de $P'(\pi/2)$ são paralelas aos vectores

$$\overline{r} = 2r(\cos\alpha\,\overline{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\overline{j}) + \frac{a}{2}\overline{k}$$

A equação vectorial do cilindro projetante da hipopeda, e de geratrizes paralelas a $\overline{r}$ é

$$M = P + t \cdot \overline{r} \tag{8}$$

Nos pontos do cilindro situados no plano xy, tomado como plano de projeção,

$$-\frac{a}{2}\cos\theta + t \cdot \frac{a}{2} = 0$$

donde

$$t = \cos\theta$$

Os coeficientes de $\overline{i}$ e $\overline{j}$ fornecem as equações paramétricas da interseção do cilindro projetante (8) com o plano xy:

$$x = r \cdot \operatorname{sen} 2\theta + 2r \cdot \cos\theta \cdot \cos\alpha = 2r \cdot \cos\theta\,(\operatorname{sen}\theta + \cos\alpha)$$

$$y = 2r \cdot \cos^2\theta + 2r \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\alpha = 2r \cdot \cos\theta\,(\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha),$$

Destas se tira

$$y = \frac{(x^2 + y^2)\,[(x^2 + y^2) + 4r(x \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha + y \cdot \operatorname{sen}^2\alpha)]}{8r(x \cdot \cos\alpha + y \cdot \operatorname{sen}\alpha)^2}$$

ou, em coordenadas polares

$$\rho = 4r \cdot \cos(\omega - \alpha) \cdot \operatorname{sen}(2\omega - \alpha) \tag{9}$$

que é a equação do trifólio oblíquo.

Casos particulares

2.1. Se, além das condições do teorema 2, as projetantes forem paralelas ao plano yz, será $\alpha = \pi/2$. Neste caso a (9) reduz-se a

$$\rho = 4r \cdot \operatorname{sen}\omega \cdot \cos 2\omega \tag{10}$$

equação do trifólio reto.

2.2. Supondo as projetantes paralelas ao plano xz, $\alpha = 0$ e a (9) reduz-se a

$$\rho = 4r \cdot \cos\omega \cdot \operatorname{sen} 2\omega \tag{11}$$

equação da fôlha dupla reta ([2]).

Teorema 3. A projeção da hipopeda sôbre o plano conduzido pelo ponto duplo e perpendicularmente às geratrizes do cilindro, desde um ponto arbitrário da curva é a estrofóide oblíqua.

Demonstração. Projetemos a hipopeda desde um centro de projeção arbitrário tomado sôbre a própria curva. Sendo θ_0 o valor do parâmetro θ que corresponde ao centro de projeção, as aquações da projeção sôbre o plano de equação $z = t$ serão

$$\begin{aligned} x &= r\frac{a \cdot \cos\theta \cdot \cos\theta_0 (\operatorname{sen}\theta_0 - \operatorname{sen}\theta) + 2t(\operatorname{sen} 2\theta_0 - \operatorname{sen} 2\theta)}{a(\cos\theta - \cos\theta_0)} \\ y &= 2r\frac{a \cdot \cos\theta \cdot \cos\theta_0 (\cos\theta_0 - \cos\theta) + 2t(\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta)}{a(\cos\theta - \cos\theta_0)} \end{aligned} \tag{12}$$

Para $t = O$ as (12) fornecem as equações paramétricas da projeção da hipopeda sôbre o plano xy:

$$\begin{aligned} x &= 2r\frac{\cos\theta \cdot \cos\theta_0 (\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta_0)}{\cos\theta_0 - \cos\theta} \\ y &= -2r \cdot \cos\theta_0 \cdot \cos\theta \end{aligned} \tag{13}$$

Consideremos um sistema de coordenadas polares (ρ, ω) cujo polo é a interseção da geratriz do cilindro que passa pelo centro de projeção

(2) Um résultado que não consta em [1] é que a fôlha dupla oblíqua é a projeção da hipopeda sôbre um plano perpendicular às geratrizes do cilindro, feita desde um ponto, distinto do ponto duplo, pertencente à tangente no ponto duplo. Em particular, se o centro de projeção é o ponto impróprio desta tangente obtemos a fôlha dupla reta.

com o plano xy, e cujo eixo polar é a reta que passa por êsse ponto e pelo ponto duplo. Temos

$$x = 2r \cdot \cos\alpha \cdot \cos\theta_0 + \rho\cos(\alpha + \omega)$$

$$y = 2r \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\theta_0 — \rho\operatorname{sen}(\alpha + \omega)$$

onde α é o suplemento do ângulo formado pelos sentidos positivos dos eixos polar e das abscissas.

Por outro lado, temos

$$\omega = \frac{\pi}{2} — \theta$$

donde resulta

$$\rho = 2r\,\frac{\cos\theta_0\,(\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha + \omega)} \qquad (14)$$

que é a equação da estrofóide oblíqua.

Casos particulares

3.1. O centro de projeção é o ponto de maior cota da hipopeda ($\theta_0 = 0$). As (13) fornecem as equações da projeção sôbre o plano xy:

$$x = r\,\frac{\operatorname{sen}2\theta}{1 — \cos\theta}\ , \quad y = —2r \cdot \cos\theta$$

que são as equações paramétricas de estrofóide reta

$$x^2 = y^2\,\frac{2r + y}{2r — y} \qquad (15)$$

3.2. O centro de projeção é o ponto duplo da hipopeda ($\theta_0 = \pi/2$). Tomando o plano de equação $z = —a/2$ como plano de projeção, as equações paramétricas da projeção são obtidas das (12) fazendo-se $t = —a/2$:

$$x = —2r \cdot \operatorname{sen}\theta\ , \qquad y = —2r \cdot \cos\theta\ ,$$

equações da circunferência de centro na origem e raio $2r$:

$$x^2 + y^2 = 4r^2$$

Teorema 4. A projeção ortogonal da hipopeda sôbre um plano paralelo às geratrizes do cilindro, mas não paralelo nem perpendicular ao plano diametral, é uma parábola virtual.

Demonstração. Considere-se a hipopeda cilíndrica dada como interseção do elipsóide

$$\frac{x^2 + y^2}{4r^2} + \frac{4z^2}{a^2} = 1 \qquad (16)$$

com o cilindro

$$x^2 + y^2 - 2\,\alpha\,x - 2\,\beta\,y = 0 \tag{17}$$

onde $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$.

A equação da projeção ortogonal sôbre o plano xz (que se acha nas condições do enunciado para $\alpha \neq 0 \neq \beta$) obtém-se eliminando y entre (16) e (17). Fazendo-se $x - \alpha = X$ e pondo $\alpha = r \cdot \cos\gamma$, $\pm\,\beta = r \cdot \operatorname{sen}\gamma$, vem

$$-\frac{8r^2}{a^2}\,z^2 = \left[\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\sqrt{r^2 + rX} + \cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{r^2 - rX}\right]^2 \tag{18}$$

equação de uma parabola virtual.

Casos particulares

4.1. Plano de projeção paralelo ao plano tangente ao cilindro no ponto duplo: $\gamma = \pi/2$. A (18) assume a forma

$$X^2 = \frac{16r^2}{a^2}\,z^2 - \frac{64r^2}{a^4}\,z^4 \tag{19}$$

equação de uma curva denominada, pelo Prof. Coifman, *lemniscata cilíndrica.*

Em particular, se $a = 2r$, isto é, se a altura do cilindro é igual ao diâmetro de sua seção reta, temos

$$x^2 = \frac{z^2}{4} - \frac{4}{r^2}\,z^4 \tag{20}$$

que é a lemniscata de Gerono.

4.2. Plano de projeção coincidente com o plano axial do cilindro contendo o ponto duplo: $\gamma = 0$. A (18) reduz-se a

$$\frac{8r}{a^2}\,z^2 = r - X\,,$$

equação de uma parabola

REFERÊNCIAS

[1] Coifman. *A hipopeda cilíndrica.* Rio de Janeiro, 1960.
[2] Gomes Teixeira. *Obras.* Vol. 5. Lisboa, 1909.
[3] Loria. *Curve piane speciali.* Vol. 1. Milano, 1930.

Instituto de Matemática da
Universidade Federal do Parana (Brasil).