

NOTA SOBRE UN EJERCICIO DE DIAGRAMAS

Por
E. G-RODEJA F.

El profesor Laplaza ha publicado en esta revista (1) una nota señalando una errata del problema 1, § 1, del primer capítulo del «Algèbre Commutative» de N. Bourbaki. (2)

"1 Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' \end{array}$$

on suppose que le couple (u', v') est une suite exacte et que $vu = 0$.
Montrer que l'on a

$$\text{Im}(b) \cap \text{Im}(u') = b(\text{Ker}(cv)) \text{ et } \text{Ker}(b) + \text{Ker}(v) = b^{-1}(\text{Im}(u'))."$$

La demostración de la primera igualdad es:

$$b(\text{Ker}(cv)) = b(\text{Ker}(v'b)) = \text{Im}(b) \cap \text{Ker}(v') = \text{Im}(b) \cap \text{Im}(u'),$$

utilizándose solamente el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\cdot}{\cdot} & \overset{\cdot}{\cdot} \\ & \vdots & \vdots \\ \dots & \overset{\cdot}{\cdot} & \overset{\cdot}{\cdot} \\ & \vdots & \vdots \\ & \overset{\cdot}{\cdot} & \overset{\cdot}{\cdot} \end{array}$$

y la exactitud de (u', v') .

Análogamente:

$$b^{-1}(\text{Im}(u'a)) = b^{-1}(\text{Im}(bu)) = \text{Im}(u) + \text{Ker}(b),$$

(1) LAPLAZA, MIGUEL L. Nota sobre un ejercicio del «Algèbre commutative» de N. Bourbaki. Gaceta Matemática Tomo XV, pág. 65 (1963).

(2) N. BOURBAKI. Algèbre commutative (1961), pág. 58.

se obtendría como propone el problema $\text{Ker}(v) + \text{Ker}(b)$ si (u, v) fuese una serie exacta, utilizándose solamente el diagrama



La condición impuesta en el problema de ser (u, v) una O—serie no es suficiente (contraejemplo en la nota citada), ahora, bien, la posible modificación al enunciado propuesta en dicha nota:

$$\text{Ker}(b) + \text{Ker}(v) = b^{-1}(\text{Im}(u')),$$

no es correcta, como se puede observar:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_A} & A \\ \downarrow & & \downarrow b \neq 0 & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{i_B} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Universidad de Santiago, 1964.

(R-1966)