ESTUDIO EN COORDENADAS POLARES DE LA POSICION DE UNA CURVA RESPECTO A UNA ASINTOTA

Por

VÍCTOR M. ONIEVA ALEIXANDRE

Sea $\rho = f(\omega)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares y supongamos que al valor $\omega = \omega_0$ del argumento corresponde una asíntota. Sabemos que $d = \lim\limits_{\omega \to \omega_0} \rho \text{ sen } (\omega - \omega_0)$ es la distancia orientada del polo a la asíntota, siendo la ecuación de ésta

$$\frac{1}{\rho_A} = \left(\frac{1}{\rho_C}\right)_{\omega = \omega_0} \text{sen } (\omega - \omega_0)$$

donde con ρ_A y ρ_C designamos, respectivamente, el radio vector genérico de la asíntota y de la curva.

La posición de la curva respecto a la asíntota, se determina mediante el signo de $u = \rho_C \text{ sen } (\omega - \omega_0) - d$ en un entorno del valor asintótico ω_0, o bien, mediante el de

$$D = \frac{1}{\rho_C} - \frac{1}{\rho_A}$$

también en un entorno de ω_0.

Para el estudio del signo de u (o el de D), los autores consultados coinciden en desarrollar en serie las citadas diferencias, o bien, procurar descomponer en producto de factores cuyo signo presente un estudio sencillo. Ambos procedimientos son, en la mayoría de los casos, de cálculo complicado.

Un método más simple que los anteriores lo proporcionan consideraciones elementales de Análisis. Basta recordar que, con las debidas condiciones de continuidad y derivabilidad, si una función tiene en un punto derivada positiva (negativa), es creciente (decreciente) en dicho punto, obteniéndose análogo resultado si en lugar de considerar un punto se trata de un entorno de dicho punto. Designemos con (1) y (2), respectivamente, ambos enunciados.

Comencemos por reducir a común denominador la diferencia u (o D), estudiando el signo del numerador $N(\omega)$ en la forma siguiente:

Sea k el orden de la primera derivada no nula en $\omega = \omega_0$. Tendremos $N^{(k)}(\omega_0) > O$ ($N^{(k)}(\omega_0) < O$), por lo que $N^{(k-1)}(\omega)$ es creciente en $\omega = \omega_0$ (decreciente en $\omega = \omega_0$). Ahora bien, $N^{(k-1)}(\omega_0) = O$, de donde resulta que en $(\omega_0 - \delta, \omega_0)$ es $N^{(k-1)}(\omega) < O$ ($N^{(k-1)}(\omega) > O$) y en $(\omega_0, \omega_0 + \delta')$ es $N^{(k-1)}(\omega) > O$ ($N^{(k-1)}(\omega) < O$). Aplicando ahora el resultado (2), determinaremos, reiterando el proceso, el signo de $N(\omega)$ en sendos semientornos de ω_0 a izquierda y derecha.

Considerando entonces, simultáneamente, el signo de $N(\omega)$ y el del denominador $D(\omega)$, habremos determinado el signo de u en un entorno de ω_0, por lo que podremos fijar la posición de la curva respecto a la asíntota en cuestión.

Para fijar ideas, apliquemos este procedimiento al siguiente ejemplo:

Sea la curva

$$\rho = \frac{a}{\cos \dfrac{3\omega}{2}}$$

Fácilmente se deduce que el intervalo de estudio, después de considerar las simetrías, es

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

Como valor asintótico en dicho intervalo, tenemos

$$\omega = \frac{\pi}{3}$$

siendo la distancia de la asíntota al polo,

$$d = \lim_{\omega \to \frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) \frac{a}{\cos \dfrac{3\omega}{2}} = -2a/3$$

Estudiemos la posición de la curva respecto a la asíntota. Tenemos

$$u = \rho \operatorname{sen}\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) - d = a \frac{3 \operatorname{sen}\left(\omega - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2 \cos \dfrac{3\omega}{2}}{3 \cos \dfrac{3\omega}{2}}$$

El denominador se anula en

$$\omega = \frac{\pi}{3}$$

siendo positivo para

$$\omega < \frac{\pi}{3}$$

y negativo para

$$\omega > \frac{\pi}{3}$$

En cuanto al signo del numerador

$$N(\omega) = 3 \operatorname{sen} \left(\omega - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \cos \frac{3\omega}{2}$$

en un entorno de

$$\omega = \frac{\pi}{3}$$

tendremos, evidentemente,

$$N\left(\frac{\pi}{3}\right) = N'\left(\frac{\pi}{3}\right) = N''\left(\frac{\pi}{3}\right) = O$$

y

$$N'''(\omega) = -3 \cos \left(\omega - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{27}{4} \operatorname{sen} \frac{3\omega}{2}$$

siendo

$$N'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 15/4 > O$$

Por tanto,

$$N'''\left(\frac{\pi}{3}\right) > O \Longrightarrow N''(\omega) \quad \text{creciente en} \quad \omega = \frac{\pi}{3} \text{ A} N''\left(\frac{\pi}{3}\right) = O \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \; -\underset{N''<O}{(\!-\!-\!-\!-} \overset{N''\left(\frac{\pi}{3}\right) = O}{,} \underset{N''>O}{-\!-\!-\!-\!)}- \;\Longrightarrow\; -\underset{N'>O}{(\!-\!-\!-\!-} \overset{N'\left(\frac{\pi}{3}\right) = O}{,} \underset{N'>O}{-\!-\!-\!-\!)}- \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \; -\underset{N<O}{(\!-\!-\!-\!-} \overset{N\left(\frac{\pi}{3}\right) = O}{,} \underset{N>O}{-\!-\!-\!-\!)}- \, .$$

Combinando ahora los signos del numerador y denominador, resulta en un entorno de

$$\omega = \frac{\pi}{3}$$

que u es negativo para

$$\omega < \frac{\pi}{3}$$

y también para

$$\omega > \frac{\pi}{3}$$

lo que nos dice que la curva para

$$\omega < \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad \omega > \frac{\pi}{3}$$

está del lado opuesto a OY, respecto de la asintota, es decir, tal como indica la figura