ANALISIS DE LA PERMUTABILIDAD DE LA INTEGRACION DE FUNCIONES REALES CONTINUAS CON EL PRODUCTO

Por
JESÚS GÓMEZ SÁNCHEZ

Introducción.—Es bien sabido, por el Análisis, que la suma de funciones integrables es también integrable, con la forma sencilla para la integral de la suma

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

y que la integral del producto de una constante por una función es integrable si lo es la función inicial, y además la integral de la función producto es de la forma

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx\,.$$

Dadas dos funciones integrables cualesquiera, su producto también es integrable, pero a diferencia de los casos anteriores, el Análisis ya no dice qué expresión tiene la integral del producto, en términos de las integrales de los factores. Por supuesto no es, en general, igual al producto de las integrales de los factores. Pues bien, tratamos ahora de determinar las relaciones que ligan a *todos* los pares de funciones reales continuas, tales que la integral de su producto sea igual al producto de las integrales de los factores, es decir, que satisfagan la ecuación

$$\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx\ ,$$

pero es necesario aclarar aún más el significado al cual nos referimos, porque además de ser esencial para toda la exposición, para evitar ciertas ambigüedades que, sin duda, podrían presentarse. Partimos de una primitiva particular, $F(x)$, de la función continua $f(x)$ y se quiere determinar una función continua $g(x)$ (no decimos la única) tal que exista una primitiva particular $G(x)$ y una cierta función primitiva, $H(x)$, de $f(x)g(x)$ de modo que se verifique

$$H(x) = F(x) \cdot G(x)$$

Pero cada vez que elijamos una primitiva para $f(x)$, de esta elección de primitiva dependerá la función $G(x)$, y por tanto, la función $g(x) = G'(x)$, empero estas dependencias funcionales serán estudiadas detenidamente más adelante. Lo que tratamos de analizar, desde el punto de vista de la Matemática estructural, es una relación (como conjunto de pares ordenados) en el espacio de todas las funciones reales continuas que las articula mediante una cierta estructura, compatible, desde luego, con las usuales y clásicas preexistentes. Veremos también que dicha estructura tiene una gran parte de contenido geométrico.

Determinación de la relación funcional explícitamente.—Vamos, primeramente, a resolver la ecuación integral, para lo cual la reducimos a una ecuación diferencial. En efecto, la ecuación

$$\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx \tag{1}$$

donde, de momento suponemos tiene solución, con el significado establecido más arriba, la derivamos, obteniendo, pues,

$$f(x)g(x) = f(x) \cdot \int g(x)dx + \int f(x)dx \cdot g(x)\,, \tag{2}$$

utilizando las funciones primitivas $F(x)$, $G(x)$ de las $f(x)$, $g(x)$, respectivamente; la ecuación (2) se convierte en

$$F'(x)G'(x) = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x) \tag{3}$$

ecuación que nos sugiere, de paso, una cuestión equivalente a la que tratamos, en otras palabras: ¿Cuándo la derivada del producto de dos funciones derivables es igual al producto de sus derivadas?

La equivalencia es inmediata; ya hemos visto que la relación (1) implica la (3). Recíprocamente, de la relación (3), llamando $f(x)$, $g(x)$ las derivadas de las funciones $F(x)$, $G(x)$, respectivamente, la ecuación (3) adopta la forma

$$f(x)g(x) = d/dx\,(F(x) \cdot G(x))$$

al integrarla nos encontraríamos con una constante arbitraria aditiva, pero como se trata de una integración indefinida, es lícito englobar tal constante en el término $\int f(x)g(x)dx$, con lo cual llegaríamos a

$$\int f(x)g(x)dx = F(x) \cdot G(x) = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

quedando establecida así la equivalencia mencionada.

La ecuación (3) se puede poner en la forma

$$F'(x)G'(x) = F(x)G(x)\,(F'(x)/F(x) + G'(x)/G(x))$$

por tanto,

$$\frac{F'(x)}{F(x)} \cdot \frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{F'(x)}{F(x)} + \frac{G'(x)}{G(x)}$$

que implica

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{F'(x)/F(x)}{F'(x)/F(x) - 1}; \quad d/dx\, ln G(x) = F'(x)/F(x) \ : \ [F'(x)/F(x) - 1]$$

así pues, suponiendo la restricción $G(x) > O$ por ahora, se tiene

$$ln\, G(x) = \int [F'(x)/F(x) : [F'(x)/F(x) - 1]]dx$$

(4) $\qquad G(x) = e^{\Phi(x)}$, donde

$$\Phi(x) = \int \frac{\dfrac{f(x)}{\int f(x)dx}}{\dfrac{f(x)}{\int f(x)dx} - 1} dx$$

pero como $G(x) = \int g(x)dx$, derivando la ecuación (4)

$g(x) = \Phi'(x) \cdot e^{\Phi(x)}$ $\qquad$ es decir, en forma definitiva

$$g(x) = \frac{\dfrac{f(x)}{\int f(x)dx}}{\dfrac{f(x)}{\int f(x)dx} - 1} e^{\int \frac{\frac{f(x)}{\int f(x)dx}}{\frac{f(x)}{\int f(x)dx} - 1} dx}$$

Propiedades de la relación funcional.—Vamos a analizar la correspondencia establecida entre los pares de funciones reales continuas.

Puesto que se verifica

$$\int g(x)f(x)dx = \int f(x)g(x)dx = \int g(x)dx \cdot \int g(x)dx = \int g(x)dx \cdot \int f(x)dx$$

en virtud de la ecuación inicial, se tiene, pues, que la relación R, que liga los pares de funciones reales continuas, coincide con su inversa, abreviadamente

$$R = R^{-1},$$

es decir, se trata de una relación simétrica. Por lo cual

$$f(x) = \Phi'(x) \cdot e\Phi(x)$$

con el significado establecido para $\Phi(x)$ anteriormente, habiendo intercambiado $f(x)$ y $g(x)$.

Como en las integraciones empleadas intervienen constantes arbitrarias, esto nos dice que la relación no es aplicación. Precisando más, ya que la expresión de $\Phi(x)$ es

$$\Phi(x) = \int \frac{\dfrac{f(x)}{\int f(x)dx}}{\dfrac{f(x)}{\int f(x)dx} - 1}\, dx$$

en ella aparecen dos constantes arbitrarias independientes, por tanto, a cada función $f(x)$ le asignamos, en la correspondencia, una infinidad de funciones doblemente infinita ∞^2.

Las funciones que se corresponden consigo mismas verifican evidentemente

$$\int f(x)f(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int f(x)dx$$

y pasando a la ecuación diferencial asociada

$$F'(x)F'(x) = F'(x)F(x) + F(x)F'(x) \; ; \; F'(x) = 2\,F(x) \; , \qquad dF/F = 2\,dx,$$

$$ln\,F - ln\,c = 2x \, , \; F(x) = c \cdot e^{2x} \, , \; F'(x) = f(x) = 2c \cdot e^{2x}$$

así pues, las funciones correspondientes de sí mismas, constituyen una infinidad simplemente infinita ∞^1.

Determinación de la relación funcional explícitamente para funciones negativas y de signo cualquiera.—Como no hemos querido abandonar el espacio de funciones reales continuas, en ningún momento, ni penetrar en el espacio de las funciones continuas complejas, ha sido necesario introducir la hipótesis restrictiva $G(x) > O$ para la primitiva de $g(x)$, la cual es la correspondiente a la función $f(x)$, que a su vez es la función elegida arbitrariamente dentro de espacio de funciones reales continuas. Recordemos que tal restricción era utilizada en la integración de la ecuación

$$\frac{G'(x)}{G\,(x)} = \frac{F'(x)/F(x)}{F'(x)/F(x) - 1}$$

entonces, suponiendo, en primer lugar $G(x) < O$, se tiene que integrando la ecuación anterior adopta ahora la forma

$$ln\,(-G(x)) = ln|G(x)| = \int G'(x)/G(x)\,dx = \int \frac{F'(x)/F(x)}{F'(x)/F(x) - 1}\,dx$$

y, por tanto,

$$-G(x) = e^{\Phi(x)} \quad ; \quad G(x) = -e^{\Phi(x)}$$

donde $\Phi(x)$ es la consabida función, resultado de dos cuadraturas.

Si consideramos la función particular $f(x) \equiv O$, entonces, evidentemente, verifica nuestra ecuación funcional

$$\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx \; ,$$

cualquiera que sea la función continua $g(x)$, insistiendo en que las constantes aditivas de integración están absorbidas en el término

$$\int f(x)g(x)dx.$$

Así, pues, a $f(x) \equiv 0$ le corresponde cada función en la relación mencionada.

Las conclusiones obtenidas también fallan en los puntos singulares $F(x) = 0$ y $G(x) = 0$ porque hemos utilizado la ecuación

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{F'(x)/F(x)}{F'(x)/F(x) - 1}$$

por tanto, hemos de excluir tales puntos singulares.

Por último, consideremos la situación en que $G(x)$ toma valores con diversos signos, para lo cual construiremos las dos funciones siguientes

$$G^+(x) = \text{Máx}\,(G(x), 0)$$

$$G^-(x) = \text{Máx}\,(-G(x), 0)$$

de donde

$$G(x) = G^+(x) - G^-(x)\ ;\ g(x) = G'(x) = G'^+(x) - G'^-(x) = \\ = g^+(x) - g^-(x)$$

donde $g^+(x)$ y $g^-(x)$ representan las derivadas, meramente, de dos funciones no negativas. Así pues:

$$\int f(x)g(x)dx = \int f(x)(g^+(x) - g^-(x))dx = \int (f(x)g^+(x) - f(x)g^-(x))dx =$$

$$= \int f(x)g^+(x)dx - \int f(x)g^-(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g^+(x)dx - \int f(x)dx \cdot$$

$$\int g^-(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int (g^+(x) - g^-(x)dx)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx \cdot$$

Se tiene que la expresión explícita para las funciones de signo variable de la primitiva de $g(x)$ tienen entonces la forma

$$G(x) = G^+(x) - G^-(x).$$

$$G^+(x) = \begin{cases} e^{\Phi(x)} & , \text{si } G(x) > 0 \\ 0 & , \text{si } G(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

$$G^-(x) = \begin{cases} e^{\Phi(x)} & , \text{si } G(x) < 0 \\ 0 & , \text{si } G(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$G(x) = e^{\Phi^+(x)} - e^{\Phi^-(x)}$$

por tanto, para la función, $g(x)$, correspondiente de la $f(x)$

$$g(x) = \Phi'^{+}(x) \cdot e^{\Phi^{+}(x)} - \Phi'^{-}(x) \cdot e^{\Phi^{-}(x)} = d/dx\, G^{+}(x) - d/dx\, G^{-}(x)$$

Creemos haber dado completa solución a la situación, en que es posible la permutabilidad de la integración de funciones reales contiguas con el producto de tales funciones, asimismo (como ya indicamos) la permutabilidad de la derivación de funciones reales derivables con el producto de ellas.

Carácter geométrico de la relación funcional.—Vamos a interpretar la relación funcional desde un punto de vista geométrico, lo cual, además de un interés propio, servirá para precisar algún aspecto de la presente exposición.

Los inmediatos resultados anteriores nos sugieren una generalización de carácter geométrico, para lo cual utilizamos la notación R para designar la relación funcional y con ella damos las siguientes definiciones:

«Llamamos fibra de la relación R, con respecto a una función continua particular $g(x)$, a todas las funciones que están R-relacionadas con $g(x)$».

«La fibra y la función de la cual procede aquélla se dirán conjugadas, y cada función de la fibra, conjugada de la función de procedencia».

No hemos hecho distinción entre fibras a la derecha o a la izquierda por ser la relación simétrica. Veamos ahora la estructura de cada fibra:

Si $\qquad (f(x), g(x)) \in R \quad , \quad (\varphi(x), g(x)) \in R$

entonces

$$\int (f(x) + \varphi(x)) g(x) dx = \int (f(x) g(x) + \varphi(x) g(x)) dx = \int f(x) g(x) dx +$$

$$+ \int \varphi(x) g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx + \int \varphi(x) dx \cdot \int g(x) dx = \left(\int f(x) dx \right. +$$

$$\left. + \int \varphi(x) dx \right) \cdot \int g(x) dx = \int (f(x) + \varphi(x)) dx \cdot \int g(x) dx$$

es decir, «la suma de dos funciones de la misma fibra, es también función de tal fibra. Abreviadamente

$$(f(x), g(x)) \in R, (\varphi(x), g(x)) \in R \quad \Rightarrow \quad (f(x) + \varphi(x), g(x)) \in R$$

Sea a un número real cualquiera, entonces

$$\int a f(x) \cdot g(x) dx = a \int f(x) g(x) dx = a \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx =$$

$$= \int a f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

es decir, «el producto de un número real por una función pertenece a la misma fibra que la función». Abreviadamente

$$a \text{ real}, \quad (f(x), g(x)) \in R \quad \Rightarrow \quad (a f(x), g(x)) \in R$$

Sintetizando los resultados:

«Cada fibra de la relación R constituye un espacio lineal».

Ya que la relación R es simétrica, se verifica que si dos fibras tienen un punto (función) común, tal como $f(x)$,

$$(f(x),g(x)) \in R,(f(x),h(x)) \in R$$

entonces todas las funciones generatrices de las fibras que pasan por $f(x)$ constituyen ellas mismas una fibra porque se deduce

$$(g(x),f(x)) \in R,(h(x),f(x)) \in R$$

precisamente la fibra conjugada de $f(x)$. Y por cada punto común a dos fibras pasan infinitas fibras.

Existencia de la fibra conjugada.—Para cada función continua $f(x)$ estudiemos la posibilidad de obtener su fibra conjugada. Como habíamos obtenido los resultados

I. Si $G(x) > O,\ g(x) = \Phi'(x) \cdot e^{\Phi(x)}$

II. $G(x) < O,\ g(x) = -\Phi'(x) \cdot e^{\Phi(x)}$

III. $G(x) \underset{\not>}{\overset{\not<}{=}} O\ g(x) = \Phi'+(x) \cdot e^{\Phi+(x)} - \Phi'-(x) \cdot e^{\Phi-(x)}$

(para todo valor)

donde

$$\Phi(x) = \int \frac{\dfrac{f(x)}{\int f(x)\,dx}}{\dfrac{f(x)}{\int f(x)dx} - 1}\,dx$$

esto nos dice que cada fibra está clasificada en tres subtipos, según el signo de la primitiva de $g(x)$. Por tanto, como $f(x)$ es continua, es integrable y está también continua, y asimismo la función que aparece en el integrando de $\Phi(x)$.

Las funciones singulares que se presentan, en esta cuestión de existencia, son

$$\int f(x)dx = O \qquad \text{y} \qquad \int f(x)dx = f(x)$$

La primera da $f(x) \equiv O$, función estudiada ya.

De la segunda ecuación se deduce

$$f'(x) = f(x), \quad \text{de solución general} \quad f(x) = e^{x+c},$$

por tanto, para este tipo de funciones hay que examinar si se pueden encontrar R-relacionadas con ellas. Habrán de satisfacer la ecuación diferencial

$$F'(x)G'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$$

es decir

$$e^{x+c}\cdot G'(x) = e^{x+c}\cdot G(x) + (e^{x+c} + d)\cdot G'(x)\ ;\ G'(x)\cdot d + e^{x+c}\cdot G(x) = 0$$

$$G'(x)/G(x) = -e^{x+c}/d\ ;\ \ln G(x) = -e^{x+c}/d + d_1\ ;\ G(x) = e^{(ae^{x+c}+b)}$$

y así hemos concluido: «Para cada función continua $f(x)$ existe una fibra que es conjugada de la función».

Unicidad de la fibra conjugada.—Como hemos dicho que a la función $f(x) = 0$ le corresponde cada función del espacio, resulta que la fibra de la función $f(x) = 0$ es todo el conjunto de funciones reales continuas, o bien la reunión de todas las fibras.

Una fibra está determinada por su función conjugada porque toda función de la fibra está dada en términos, de manera simple, de nuestra función $\Phi(x)$, la cual contiene dos constantes arbitrarias (cada par de constantes para cada función de la fibra) y la función conjugada de la fibra, $f(x)$, de modo que al asignarle valores a esos dos parámetros se obtienen todas y cada una de las funciones de la fibra, como se puede apreciar en

$$\Phi(x) = \int \frac{\dfrac{f(x)}{\int f(x)dx}}{\dfrac{f(x)}{\int f(x)dx} - 1}\,dx$$

Funciones conjugadas de la misma fibra.—Así como a cada función le corresponde una sola fibra conjugada, la recíproca no es cierta, es decir. cada fibra proviene de más de una funcicn conjugada. Pues podemos tomar primitiva de $f(x)$ una función $F(x)$ y entonces una función $f_1(x)$ con primitiva $F_1(x)$ tal que su fibra conjugada coincida con la fibra conjugada de $f(x)$; considerando los tres subtipos de fibra posibles I, II, III, para que se verifique

$$g(x) = g_1(x)$$

como figuran un factor exponencial y $\Phi'(x)$, la cual en general no es de tipo exponencial, se ha de tener

$$\Phi(x) = \Phi_1(x)$$

como esta ecuación es entre primitivas, su función integrando es igual, o sea

$$\frac{f(x)/\int f(x)dx}{f(x)/\int f(x)dx - 1} = \frac{f_1(x)/\int f_1(x)dx}{f_1(x)/\int f_1(x)dx - 1}$$

quitando denominadores se llega a

$$f(x)/\int f(x)dx = f_1(x)/\int f_1(x)dx$$

y, por tanto,

$$d/dx\, ln\, F(x) = d/dx\, ln\, F_1(x) ;\ ln\, F(x) = ln\, F_1(x) + ln\, c ;\ F(x) = cF_1(x)$$

en definitiva

$$F'(x) = cF'_1(x) ;\ f(x) = cf_1(x)$$

con lo cual la fibra no determina su función conjugada, unívocamente, sino a menos de una homotecia.

Incidencia de la fibra y la función conjugada.—Veamos qué ocurre cuando la función conjugada, $f(x)$, de la fibra pertenece a ésta, es decir

$$(f(x),f(x)) \in R$$

Ya sabíamos, que las funciones autorrelacionadas son de la forma general

$$f(x) = a \cdot e^{2x}$$

determinemos ahora las fibras de estas funciones

$$\Phi'(x) = \frac{a \cdot e^{2x}/\int a \cdot e^{2x}dx}{ae^{2x}/\int ae^{2x}dx - 1} = \frac{a \cdot e^{2x}/\frac{1}{2}ae^{2x} + ac}{(ae^{2x}/\frac{1}{2}ae^{2x}+ac)-1} =$$

$$= \frac{e^{2x}/\frac{1}{2}e^{2x} + c}{(e^{2x}/\frac{1}{2}e^{2x} + c) - 1} = \frac{e^{2x}/\frac{1}{2}e^{2x} + c}{e^{2x} \cdot \frac{1}{2} - c/\frac{1}{2}e^{2x} + c} = e^{2x}/\frac{1}{2}e^{2x} - c$$

y, por tanto,

$$\Phi(x) = \int e^{2x}/\tfrac{1}{2}e^{2x} - c\, dx = ln(\tfrac{1}{2}e^{2x} - c) + lnb = ln\, b(\tfrac{1}{2}e^{2x} - c)$$

y para las fibras del subtipo I se tiene, pues,

$$g(x) = \Phi'(x)e^{\Phi(x)} = [e^{2x}/\tfrac{1}{2}e^{2x} - c]\, e^{ln(\frac{1}{2}e^{2x} - c)b} =$$

$$= [e^{2x}/\tfrac{1}{2}e^{2x} - c]\, b(\tfrac{1}{2}e^{2x} - c) = be^{2x}$$

para los otros dos subtipos de fibras sustituyendo análogamente, se tiene

$$g(x) = be^{2x}$$

y esta es la fibra conjugada de cada función autorrelacionada $f(x) = ae^{2x}$

Pero esta conclusión nos dice aún más:

«Todas las funciones conjugadas de una función autorrelacionada, por la relación R, son funciones autorrelacionadas.»

En otras palabras:

«La familia de funciones autorrelacionadas, mediante R, constituyen una fibra.»

La fibra de funciones autorrelacionadas, en cuanto espacio vectorial, tiene dimensión 1. En efecto, las funciones de la fibra, de la forma ae^{2x}, son vectores colineales del vector e^{2x}.

Puntos singulares.—Volvamos a los puntos singulares, recordando que eran aquéllos, tales que verificaban

$$F(x) = O \quad o \quad G(x) = O$$

pues la función $\Phi(x)$, por medio de la cual obteníamos las funciones correspondientes, en la relación funcional, presenta allí singularidades, y por tanto, ninguna información nos suministra. Vayamos por otro camino:

Sea x_0 un punto singular, es decir $F(x_0) = O$ o $G(x_0) = O$; y sean los demás valores de la función, en un entorno de x_0 no nulos, de modo que en la ecuación funcional sean soluciones todo $x \neq x_0$ del entorno en

$$\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

entonces llamando $H(x)$ la primitiva (apropiada, claro es) del primer miembro, por ser continuas las funciones $F(x)$, $G(x)$,$H(x)$ se tiene

$$\lim_{x \to x_0} H(x) = \lim_{x \to x_0} (F(x) \cdot G(x)) = \lim_{x \to x_0} F(x) \cdot \lim_{x \to x_0} G(x)$$

$$H(x_0) = F(x_0) \cdot G(x_0)$$

verificando también la ecuación los puntos singulares. Así que las únicas singularidades que caben son las propias del producto, de la forma $O \cdot \infty$

Finalmente, otras singularidades que caben en $\Phi(x)$ son aquéllas, tales que

$$f(x)/\int f(x)dx = 1, \text{ es decir } F'(x) = F(x)$$

para algunos puntos. Llevando estos puntos a la ecuación diferencial asociada

$$F'(x)G'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$$

$$F'(x) = F(x)$$

de donde

$$F(x)G'(x) = F(x)G(x) + F(x)G'(x) \;;\; F(x)G(x) = O$$

así que como son

$$F(x) = O \text{ o } G(x) = O$$

no se trata esencialmente de singularidades distintas de las anteriormente consideradas.

Permutabilidad de la integración de funciones con su cociente.—Todo el análisis de la permutabilidad de la integración de funciones reales continuas con su producto, así como los resultados obtenidos, es válido (mutatis mutandis) para la cuestión de la permutabilidad de la integración de funciones reales continuas con su cociente, puesto que se verifica

$$\int f(x)/g(x)\, dx = \int f(x)dx / \int g(x)dx$$

si, y sólo si

$$\int f(x)dx = \int f(x)/g(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

y con la consideración de las funciones $g(x)$, $h(x) = f(x)/g(x)$ se reduce el análisis de la cuestión al precedente, con la única restricción de excluir los puntos en los cuales $g(x) = 0$.