SOLUCIONES MATRICIALES DEL SISTEMA $\dfrac{d^2X}{dt^2} = A\,X + b$

Por

RAMÓN FERNÁNDEZ ALVAREZ-ESTRADA

INTRODUCCION

En esta nota aplicaremos el cálculo matricial a la resolución del sistema diferencial lineal

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = B\,\mathbf{x} + \mathbf{b} \qquad [1]$$

siendo $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ vectores columna cuyas q componentes son funciones reales de la variable real t; $\mathbf{b}$ se supone conocido, pero no $\mathbf{x}$; B es una matriz de orden q, cuyas componentes son constantes reales conocidas. Previamente, introduciremos el concepto de raíz de una matriz, que luego utilizaremos. En los conceptos fundamentales sobre matrices y sistemas diferenciales lineales, y en algunos cálculos muy habituales efectuados con ellos, seguiremos A. Dou [1].

I. RAÍCES DE MATRICES

Sea A una matriz de orden n, cuyos elementos son números complejos. Una matriz de orden n, con elementos complejos, representada por $A^{1/m}$ se dirá raíz m-ésima de A si se cumple

$$(A^{1/m})^m = A^{1/m} \cdot A^{1/m} \,\ldots\ldots\, A^{1/m} = A$$

Teorema.—Si A es no singular (det $A \neq O$), posee al menos una raíz m-ésima, para todo entero positivo m.

Por brevedad, no daremos la demostración, que sigue los mismos cauces que las dadas en [1] para la exponencial y el logaritmo de una matriz, y simplemente daremos la forma de construir algunas matrices $A^{1/m}$.

Sea J la forma de Jordán de A; se tiene:

$$A = PJP^{-1}$$

P^{-1} es la matriz inversa de P. Sobre el cálculo de P y J pueden verse [1] y [2]. J tiene la forma

$$J = \begin{pmatrix} K_1 & & & \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_r \end{pmatrix} \qquad [2]$$

siendo $K_i = \lambda_h I_j + L_j \quad i = 1,2,\ldots.r;\ r \leqslant n$; los restantes elementos de J son nulos y no se escriben; λ_h es un autovalor de $A(h \leqslant n)$; I_j es la matriz unidad de orden j; L_j, de orden j, tiene la forma:

$$L_j = \begin{pmatrix} 0\,1\,0 & \ldots. & 0 \\ 0\,0\,1 & \ldots. & 0 \\ 0\,0\,0 & \ldots. & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\,0\,0 & \ldots. & 1 \\ 0\,0\,0 & \ldots. & 0 \end{pmatrix} \qquad [3]$$

Se tiene:

$$(L_j)^j = O \qquad [4]$$

Para cada h puede varios valores de j. Además, $\lambda_h \neq O$.

Una raíz m-ésima de A es

$$A^{1/m} = PJ^{1/m}P^{-1}$$

siendo

$$J^{1/m} = \begin{pmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_r \end{pmatrix}$$

con

$$H_i = \lambda_h^{1/m} \left[I_j + \binom{1/m}{1} \frac{L_j}{\lambda_h} + \binom{1/m}{2} \left(\frac{L_j}{\lambda_h}\right)^2 + \ldots\ldots + \binom{1/m}{j-1} \left(\frac{L_j}{\lambda_h}\right)^{j-1} \right]$$

siendo

$$\binom{1/m}{5} = \frac{(1/m)(1/m - 1)(1/m - 2)\ \ldots\ldots\ (1/m - S + 1)}{S!}$$

$$S = 1,2,\ldots., j - 1$$

Corolarios

1) Si u es un número complejo:

$$(u\mathrm{A})^{1/m} = u^{1/m}\,\mathrm{A}^{1/m}$$

2)

$$det(\mathrm{A}^{1/m}) = (det\mathrm{A})^{1/m} \neq 0$$

3) Si las matrices A y B son hermíticas y conmutan (siendo singulares o no):

$$(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{1/m} = (\mathrm{B}\cdot\mathrm{A})^{1/m} = \mathrm{A}^{1/m}\cdot\mathrm{B}^{1/m} = \mathrm{B}^{1/m}\cdot\mathrm{A}^{1/m}$$

4)

$$(\mathrm{A}^{1/m})^{1/p} = (\mathrm{A}^{1/p})^{1/m} = \mathrm{A}^{1/m\cdot p}$$

5) Si A es diagonalizable, singular o no, puesto que

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix} \qquad r \leqslant m \qquad [5]$$

entonces

$$\mathrm{J}^{1/m} = \begin{pmatrix} \lambda_1{}^{1/m} & & & \\ & \lambda_2{}^{1/m} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r{}^{1/m} \end{pmatrix}$$

6) Las matrices singulares pueden tener o no raíces de un orden dado. Así,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

carece de raíces cuadradas, como puede probarse fácilmente.

7) Puesto que en H_i figura $\lambda_h{}^{1/m}$, y como λh posee m raíces complejas diferentes, podemos tener m matrices $\mathrm{H}i$ distintas.

Así, si $m = 2$ y si α_h, β_h son las dos raíces cuadradas de λ_h, habrá dos posibles H_i:

$$\mathrm{H}_{i_1} = \alpha_h \left[\mathrm{I}_j + \sum_{s=1}^{j-1} \binom{1/2}{s} \left(\frac{\mathrm{L}_j}{\lambda_h}\right)^s \right] \qquad [6]$$

$$H_{t2} = \beta h \left[J_j + \sum_{s=1}^{j-1} \binom{1/2}{s} \left(\frac{L_j}{\lambda h}\right)^s \right] \qquad [7]$$

Nótese que

$$H_{t1} + H_{t2} = o$$

pues

$$\alpha h + \beta h = o$$

Las matrices H_{i1}, H_{t2}, pueden combinarse de varias maneras para formar las matrices $J^{1/2}$ con lo que resultan varias matrices $A^{1/2}$.

Así, entre otras posibilidades, tenemos

$$A_1^{1/2} = P \begin{pmatrix} H_{11} & & & \\ & H_{21} & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_{r1} \end{pmatrix} P^{-1} = PJ_1^{1/2} P^{-1}$$

$$A_2^{1/2} = P \begin{pmatrix} H_{12} & & & \\ & H_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_{r2} \end{pmatrix} P^{-1} = PJ_2^{1/2} P^{-1}.$$

Nótese que

$$A_1^{1/2} + A_2^{1/2} = o \quad , \quad J_1^{1/2} + J_2^{1/2} = O$$

II. Aplicación a sistemas homogéneos

Pasemos a resolver (1), suponiéndolo homogéneo.

$$\frac{d^2X}{dt^2} = B\,X \qquad [8]$$

donde B es cualquiera. Su forma de Jordán, S, será del tipo

$$S = \begin{pmatrix} L_\alpha & & & & \\ & L_\beta & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & L_\nu & \\ & & & & J \end{pmatrix}$$

siendo J una submatriz de orden n como la representada en (2); J es no singular y corresponde a todos los autovalores de B diferentes de cero; L_α, $L_\beta, \ldots,$ L_ν son las diversas submatrices correspondientes al autovalor cero de B, y son análogas a las (3); $\alpha, \beta, \ldots \nu$ pueden ser iguales o no. Se tiene

$$B = P\,S\,P^{-1}$$

y por tanto:

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = PSP^{-1}\,\mathbf{X}$$

de donde:

$$\frac{d^2(P^{-1}\mathbf{X})}{dt^2} = S \cdot (P^{1-}\mathbf{X})$$

pues P no depende de t. Si hacemos

$$\mathbf{Y} = P^{-1}\,\mathbf{X}$$

resulta

$$\frac{d^2\mathbf{Y}}{dt^2} = S\,\mathbf{Y} \qquad [9]$$

El vector $\mathbf{Y}$ posee q componentes. Sus primeras $\alpha + \beta + \ldots + \nu$ componentes están relacionadas entre sí y con las submatrices L_α, $L_\beta, \ldots, L_\nu$, pero no lo están con la submatriz J ni con las demás componentes de $\mathbf{Y}$. Si $\alpha + \beta + \ldots + \nu = l$:

$$\frac{d^2\mathbf{Y}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2y_1}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y_l}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y_{l+1}}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y_q}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_\alpha & & & & \\ & L_\beta & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & L_\nu & \\ & & & & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \\ y_{l+1} \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} = S \cdot \mathbf{Y}$$

Efectuado el producto de S por $\mathbf{Y}$ resultan dos sistemas diferenciales independientes, que pueden escribirse separadamente así:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d^2y_1}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^2y_l}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_\alpha & & & \\ & L_\beta & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} \qquad [10]$$

$$\frac{d^2\mathbf{Z}}{dt^2} = J\,\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} y_{l+1} \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \qquad [11]$$

El sistema (10) se puede integrar directamente, gracias a la sencilla estructura de las matrices L_α, $L_\beta, \ldots L_\nu$. Su integral general es, como fácilmente se comprueba:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_\alpha & & & \\ & M_\beta & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ C_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_\alpha & & & \\ & N_\beta & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{l+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{2l} \end{pmatrix}$$

siendo M_α, N_α dos submatrices de orden α, correspondientes a L_α

$$M\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{t^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)!} & \dfrac{t^{2\alpha-2}}{(2\alpha-2)!} & \cdots\cdots & \dfrac{t^{\alpha}}{\alpha!} \\ \dfrac{t^{2\alpha-3}}{(2\alpha-3)!} & \dfrac{t^{2\alpha-4}}{(2\alpha-4)!} & \cdots\cdots & \dfrac{t^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t & 1 & & 0 \end{pmatrix};$$

$$N\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} & \dfrac{t^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} & \cdots\cdots & \dfrac{t^2}{2!} & t & 1 \\ \dfrac{t^{\alpha-3}}{(\alpha-3)!} & \dfrac{t^{\alpha-4}}{(\alpha-4)!} & \cdots\cdots & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{t^{\alpha-5}}{(\alpha-5)!} & \dfrac{t^{\alpha-6}}{(\alpha-6)!} & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Análogas expresiones para M_β, $N_\beta, \ldots, M_\nu$, N_ν; $c_1 \ldots c_2, c_{l+1}, \ldots c_{2l}$ son $2l$ constantes de integración.

Pasemos a integrar el sistema (11). Buscaremos como solución un vector del tipo:

$$\mathbf{Z} = \exp(t \cdot Q) \cdot \mathbf{a} \qquad [12]$$

siendo Q cierta matriz constante de orden $q - l = n$; $\exp(t\,Q)$ es otra matriz de orden n; **a** es un vector columna con n constante.

Se tendrá:

$$\frac{d^2\mathbf{Z}}{dt^2} = Q^2 \cdot \exp(t\,Q)\,\mathbf{a} = J\,\mathbf{Z} = J \cdot \exp(t\,Q) \cdot \mathbf{a}$$

(sobre la derivación de exponenciales de matrices, véase [1]). Es evidente que si hacemos

$$Q^2 = J$$

el vector (12) será, en efecto, solución de (11).

Así, tomamos

$$Q = J_1^{1/2} = \begin{pmatrix} H_{11} & & & \\ & H_{21} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot H_{r1} \end{pmatrix}$$

estando Hi_1 dadas por (6) , y calcularemos directamente $\exp(t \cdot J_1^{1/2})$. Teniendo en cuenta

$$\exp(t\, J_1^{1/2}) = In + t\, J_1^{1/2} + \frac{(tJ_1^{1/2})^2}{2!} + \frac{(tJ_1^{1/2})^3}{3!} + \ldots$$

y la forma de $J_1^{1/2}$, y utilizando el producto particionado de $J_1^{1/2}$ por sí misma varias veces, resulta:

$$\exp(t\, J_1^{1/2}) = \begin{pmatrix} \exp(t\, H_{11}) & & & \\ & \exp(t\, H_{21}) & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & \exp(t\, H_{r1}) \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora $\exp(t\, H_{i1})$. Teniendo en cuenta que I_j conmuta con $\left(\frac{L_j}{\lambda h}\right)^s$, y que las $\left(\frac{L_j}{\lambda h}\right)^s$ conmutan entre sí, resulta:

$$\exp(t\;\; H_{i1}) = \exp(t\alpha h I_j) \cdot \exp\left[t\alpha h \binom{1/2}{1} \frac{L_j}{\lambda h}\right] \cdot \exp\left[t\alpha h \binom{1/2}{2} \left(\frac{L_j}{\lambda h}\right)^2\right] \ldots .$$

$$\ldots .. \exp\left[t\alpha h \binom{1/2}{j-1} \left(\frac{L_j}{\lambda h}\right)^{j-1}\right]$$

(operaciones parecidas se veran en [1]).

Por simplificar, introducimos el monomio.

$$nt_{1\cdot} = t'\alpha h \binom{1/2}{s} \frac{1}{\lambda hs}$$

El segundo subíndice, 1, va en correspondencia con la raíz αh de λh. Puesto que

$$\exp(t\; \alpha h\; I_j) = \exp(t\alpha h) \cdot I_j$$

resulta:

$$\exp(tH_{i1}) = \exp(t\alpha h) \cdot I_j \cdot \exp(n_{h11}\, L_j) \cdot \exp(n_{h12}\, L^2{}_j) \ldots \exp(n_{h1j-1}\, L_j{}^{-1})$$

Teniendo en cuenta (4)

resulta

$$\exp(n_{h1s}\, L_j{}^s) = I_j + n_{h1s}\, L_j{}^s + \frac{(n_{h1s}\, L_j{}^s)^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{(n_{h1s}\, L_j{}^s)^\gamma}{\gamma!} \qquad [13]$$

siendo

$$\gamma \cdot s < j \leqslant \gamma + 1)s$$

Multiplicando entre sí los $j - 1$ términos (13), teniendo en cuenta (4), obtenemos:

$$\exp(t\, H_{i1}) = \exp(t\alpha t) \left[I_j + \sum_{u=1}^{u=j-1} R_{h1u}\,(t)\, L_j{}^u \right]$$

siendo $R_{h1u}\,(t)$ ciertos polinomios en t, de grado u. Los primeros, en función de las n_{h1s} son:

$$R_{h11} = n_{h11}$$

$$R_{h12} = \frac{nh^2{}_{11}}{2!} + n_{h12}$$

$$R_{h13} = \frac{nh^3{}_{11}}{3!} + n_{h11} \cdot n_{h12} + n_{h13}$$

$$R_{h14} = \frac{nh^4{}_{11}}{4!} + \frac{nh^2{}_{11}}{2!} \cdot n_{h14} + n_{h11} \cdot n_{h13} + \frac{nh^2{}_{12}}{2!} + n_{h14}$$

$$R_{h15} = \frac{nh^5{}_{11}}{5!} + \frac{nh^3{}_{11}}{3!} n_{h12} + \frac{nh^2{}_{11}}{2!} \cdot n_{h13} + n_{h11} \left(\frac{nh^2{}_{12}}{2!} + n_{q14} \right) +$$
$$+ n_{h12} \cdot n_{h13} + n_{h15}$$

$$R_{h16} = \frac{nh^6{}_{11}}{6!} + \frac{nh^4{}_{14}}{4!} n_{h12} + \frac{nh^3{}_{11}}{3!} \cdot n_{h13} + \frac{nh^2{}_{11}}{2!} \left(\frac{n^2{}_{h12}}{2!} + n_{h14} \right) +$$
$$+ n_{h11}(n_{h12} n_{h13} + n_{h15}) + \frac{nh^3{}_{12}}{3!} + n_{h12} \cdot n_{h14} + \frac{n^2{}_{h13}}{2!} + n_{h16}$$

Nótese que para hallar cada R_{h1u} se descompone u en todas las posibles sumas de enteros positivos. Cada suma da lugar a un producto de monomios n_{h1s} de los que forman R_{h1u}. Así, si $u = 4$, la descomposición $4 = 1 + 1 + 2$ da lugar al término:

$$\frac{n_{h11} \cdot n_{h11}}{(1 + 1)!} \cdot \frac{n_{h12}}{1!}$$

Igual se procede con $u = 7, 8, 9, \ldots$ Para expresar R_{h1v} en función de t sólo es preciso sustituir los monomios n_{h1s} por sus valores.

$$R_{h11} = \frac{t}{2\alpha_h}$$

$$R_{h12} = \frac{t^2}{8\lambda_h} - \frac{\alpha_h t}{8x_h^2}$$

$$R_{h13} = \frac{t^3}{48\alpha_h^3} - \frac{t^2}{16\lambda_h^2} + \frac{\alpha_h t}{16\lambda_h^3} \qquad \text{etc.}$$

La forma explícita de $\exp(t\ H_{l1})$ es:

$$\exp(t\ H_{l1}) = \begin{pmatrix} \exp(t\alpha r) & \exp(t\alpha_h) \cdot R_{h11} & \exp(t\alpha_h) R_{h12} & \exp(t\alpha_h) R_{h1J-1} \\ & \exp(t\alpha_h) & \exp(t\alpha_h) R_{h11} & \exp(t\alpha_h) R_{h1J-2} \\ & & \exp(t\alpha_h) & \exp(t\alpha_h) R_{h1J-3} \\ & & & \\ & & & \exp(t\alpha_h) R_{h11} \\ & & & \exp(t\alpha_h) \end{pmatrix}$$

Así queda calculada $\exp(t\ J_1^{1/2})$.

Ahora podemos tomar

$$Q = J_2^{1/2} = \begin{pmatrix} H_{12} & & \\ & \ddots & \\ & & H_{r2} \end{pmatrix}$$

estando H_{l2} dadas en (J).

Así obtenemos otra matriz exp. $(t\ J_2^{1/2})$ que nos dara lugar a otras soluciones.

Introduciendo

$$n_{h2s} = t\ \beta_h \binom{1/2}{s} \frac{1}{\lambda_h^s}$$

hallaremos otros polinomios R_{h2u}, igual que antes.

El cálculo de $\exp(t\ J_2^{1/2})$ es totalmente análogo. La solución general del sistema (11) es:

$$\mathbf{Z} = \exp(t\ J_1^{1/2})\ \mathbf{a}_1 + \exp(t\ J_2^{1/2})\ \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{2n} \end{pmatrix}$$

$a_1 \ldots a_{2n}$ son constantes de integración. Ninguno de los vectores $\exp(t\,J_1^{1/2})\,\mathbf{a}_1$ está contenido en los $\exp(t\,J_2^{1/2})\,\mathbf{a}_2$ ni recíprocamente, pues en los primeros aparecen $\exp(\alpha_h t)$ y en los segundos $\exp(\beta_h t)$, siendo

$$\alpha_h = -\beta_h$$

con lo cual es imposible una dependencia lineal entre ellos; eligiendo adecuadamente $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ pueden obtenerse $2n$ vectores $\mathbf{Z}$ linealmente independientes entre sí, soluciones del sistema (11).

Conocidas las soluciones generales de los sistemas (10) y (11), puede escribirse la solución general de (9):

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_l \\ y_{l+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_\alpha & & & & & \\ & M_\beta & & & & \\ & & M_\nu & & & \\ & & & \exp(tH_{11}) & & \\ & & & & \exp(tH_{21}) & \\ & & & & & \exp(tH_{r_1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ c_l \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} N_\alpha & & & & & \\ & N_\beta & & & & \\ & & N_\nu & & & \\ & & & \exp(tH_{12}) & & \\ & & & & \exp(tH_{22}) & \\ & & & & & \exp(tH_{r_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{l+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{2l} \\ a_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{2n} \end{pmatrix} \qquad [14]$$

La solución general del sistema (8) es:

$$\mathbf{x} = \mathrm{P}\,\mathbf{y}$$

Corolarios

1) Si B fuese una matriz no - singular, siendo

$$\mathrm{B} = \mathrm{P\,J\,P}^{-1}$$

la integral general será:

$$\mathbf{x} = \mathrm{P}\,\exp(t\,J_1^{1/2})\,\mathbf{a}_1 + \mathrm{P}\,\exp(t\,J_2^{1/2})\,\mathbf{a}_2$$

2) La resolución del sistema (8) se reduce a encontrar la forma de Jordán de B y a calcular la matriz P. Para esto, véase [1], [2].

3) El metodo expuesto es aplicable a sistemas del tipo

$$\frac{d^m\mathbf{X}}{dt^m} = \mathrm{B}\,\mathbf{X}$$

si se consideran raíces m - ésimas en vez de raíces cuadradas, si bien las fórmulas finales son más complicadas.

4) Si en (8) B, singular o no, es diagonalizable, siendo su forma de Jordán (5), la integral general es:

$$\mathbf{X} = \mathrm{P}\exp(t\,\mathrm{J}_1{}^{1/2})\,\mathbf{a}_1 + \mathrm{P}\exp(t\,\mathrm{J}_2{}^{1/2})\,\mathbf{a}_2$$

siendo

$$\exp(t\,\mathrm{J}_1{}^{1/2}) = \begin{pmatrix} \exp(t\alpha_1) & & & \\ & \exp(t\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(t\alpha_r) \end{pmatrix}$$

$$\exp(t\,\mathrm{J}_2{}^{1/2}) = \begin{pmatrix} \exp(t\beta_1) & & & \\ & \exp(t\beta_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(t\beta_r) \end{pmatrix}$$

5) Las matrices $\exp(t\,\mathrm{J}_1{}^{1/2})$, $\exp(t\,\mathrm{J}_2{}^{1/2})$ son siempre no singulares; la matriz

$$\begin{pmatrix} \mathrm{M}_\alpha & & \\ & \mathrm{M}_\beta & \\ & & \mathrm{M}_\nu \end{pmatrix}$$ es, en general. no singular;

entonces la primera matriz en (14) es no singular; en cambio, la matriz

$$\begin{pmatrix} \mathrm{N}_\alpha & & \\ & \mathrm{N}_\beta & \\ & & \mathrm{N}_\nu \end{pmatrix}$$

en general, será singular, y lo mismo ocurrirá con la segunda matriz en (14).

6) El método expuesto no es aplicable, en general, al sistema

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} + \mathrm{D}\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathrm{E}\,\mathbf{X} = \mathbf{0} \qquad [15]$$

siendo D, E dos matrices de coeficientes constantes.

Si se cumple

$$\mathrm{DE} = \mathrm{ED} \qquad [16]$$

es posible reducir (15) a un sistema del tipo (8).

En efecto, haciendo el cambio de variable funcional:

$$\mathbf{X} = \exp\left(-\frac{t}{2}\,\mathrm{D}\right)\cdot\mathbf{V}$$

se obtiene:

$$\frac{d^2V}{dt2} = \left(\frac{D^2}{4} - E\right) V$$

7) Los sistemas homogéneos con matriz B simétrica aparecen en la teoría de las pequeñas vibraciones en torno a un punto P de equilibrio estable. Si en un entorno de P la energía cinética T y la energía potencial V están representadas por

$$T = \sum_{ij=1}^{n} T_{ij} \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_j}{dt} \qquad V = \sum_{ij=1}^{n} V_{ij} X_i X_j ,$$

siendo X_i las coordenadas generalizadas y

$$\frac{dxi}{dt}$$

las velocidades generalizadas, al aplicar el principio de mínima acción a este sistema mecánico se llega a que sus ecuaciones de Lagrange forman el sistema:

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = B\,X$$

$$\text{con} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} , \quad B = -T^{-1} \cdot V$$

siendo

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \dots T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} \dots T_{2n} \\ \dots & \dots \\ T_{n1} & T_{n2} \dots T_{nn} \end{pmatrix} , \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \dots V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} \dots V_{2n} \\ \dots & \dots \\ V_{n1} & V_{n2} \dots V_{nn} \end{pmatrix}$$

Como T y V son simétricas, B también lo es.

Un sistema análogo (con B simétrica) aparece en la teoría de redes de circuitos acoplados con inductancias y capacidades, sin resistencias pasivas. La solución de este sistema viene dada en el corolario 4).

III. Sistemas no homogéneos

Pasemos a resolver (1); las componentes de $\mathfrak{b}$ se suponen funciones continuas de t; supondremos que B es singular, como en II.

$$B = P \begin{pmatrix} L_\alpha & & & \\ & L_\beta & & \\ & & L_\nu & \\ & & & J \end{pmatrix} P^{-1} = P\,S\,P^{-1}$$

La solución general de (1) es suma de una solución particular suya y de la solución general en el caso $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, que ya conocemos.

A continuación hallaremos una solución particular de (1), que es lo único que falta.

Procediendo como en II, hacemos el cambio de $\mathbf{X}$ por $\mathbf{Y}$, y llegamos a

$$\frac{d^2\mathbf{Y}}{dt^2} = \mathrm{S}\,\mathbf{Y} + \mathfrak{g} \qquad [17]$$

siendo

$$\mathfrak{g} = \mathrm{P}^{-1}\,\mathfrak{b}$$

Operando como en II, se llega a dos sistemas separados:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d^2y_1}{dt^2} \\ \\ \\ \dfrac{d^2y_l}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_\alpha & & & \\ & \mathrm{L}_\beta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{L}_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_l(t) \end{pmatrix} \qquad [18]$$

$$\frac{d^2\mathbf{Z}}{dt^2} = \mathrm{J}\;\mathbf{Z} + \mathfrak{h},\; \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} y_{l+1} \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{h} = \begin{pmatrix} g_{l+1}(t) \\ \vdots \\ g_q(t) \end{pmatrix} \qquad [19]$$

Una solución particular de (18) se halla fácilmente, debido a la forma sencilla de las matrices L y es

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{\alpha-2} \\ y_{\alpha-1} \\ y_\alpha \\ \vdots \\ y_{l-\nu+1} \\ \vdots \\ y_{l-2} \\ y_{l-1} \\ y_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_\alpha^{(2\alpha)} + \varphi_{\alpha-1}^{(2\alpha-2)} + \varphi_{\alpha-2}^{(2\alpha-4)} + \ldots\ldots + \varphi_1^{(2)} \\ \vdots \\ \varphi_\alpha^{(6)} + \varphi_{\alpha-1}^{(4)} + \varphi_{\alpha-2}^{(2)} \\ \varphi_\alpha^{(4)} + {}_{\alpha-1}^{(2)} \\ \varphi_\alpha^{(2)} \\ \vdots \\ \varphi_l^{(2\nu)} + \varphi_{l-1}^{(2\nu-2)} + \varphi_{l-2}^{(2\nu-4)} + \ldots\ldots + \varphi_{l-\nu+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \varphi_l^{(6)} + \varphi_{l-1}^{(4)} + \varphi_{l-2}^{(2)} \\ \varphi_l^{(4)} + \varphi_{l-1}^{(2)} \\ \varphi_l^{(2)} \end{vmatrix}$$

siendo $\varphi_j^{(h)}$ una función de t:

$$\varphi_j^{(h)} = \frac{1}{(h-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-x)^{h-1} g_i(x)dx + P^{(h)}(t)$$

$j = 1,2,\ldots l$
h, entero positivo par

to es arbitrario; $P^{(h)}(t)$ es un polinomio arbitrario en t, de grado $h - 1$. que puede suponerse nulo si se quiere.

Pasemos ahora a (19). Busquémosle una solución particular del tipo:

$$\mathbf{Z} = \exp(t\,\mathrm{J}_1{}^{1/2})\,\mathbf{a}_1(t) \quad + \quad \exp(t\,\mathrm{J}_2{}^{1/2})\,\mathbf{a}_2(t) \qquad [20]$$

siendo $\mathbf{a}_1(t)$, $\mathbf{a}_2(t)$ dos vectores columnas a determinar. Les impondremos la condición

$$\exp(t\,\mathrm{J}_1{}^{1/2}) \frac{d\mathbf{a}_1}{dt} + \exp(t\,\mathrm{J}_2{}^{1/2}) \frac{d\mathbf{a}_2}{dt} = \mathbf{o} \qquad [21]$$

Imponiendo a (20) el que sea solución de (19) y simplificando, resulta:

$$\mathrm{J}_1{}^{1/2} \exp(t\,\mathrm{J}_1{}^{1/2}) \frac{d\mathbf{a}_1}{dt} + \mathrm{J}_2{}^{1/2} \exp(t\,\mathrm{J}_2{}^{1/2}) \frac{d\mathbf{a}_2}{dt} = \mathbf{h} \qquad [22]$$

Cálculos análogos a éste y al que sigue pueden verse en [1].

Resolviendo (21) y (22) respecto a

$$\frac{d\mathbf{a}_1}{dt} \text{ y } \frac{d\mathbf{a}_2}{dt}$$

obtenemos:

$$\frac{d\mathbf{a}_1}{dt} = \frac{1}{2} \exp(t\,\mathrm{J}_2{}^{1/2}) \cdot (\mathrm{J}_2{}^{1/2})^{-1} \cdot \mathbf{h}$$

$$\frac{d\mathbf{a}_2}{dt} = \frac{1}{2} \exp(t\,\mathrm{J}_1{}^{1/2}) \cdot (\mathrm{J}_2{}^{1/2})^{-1} \cdot \mathbf{h}$$

Por tanto,

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2} \exp(t\,\mathrm{J}_1{}^{1/2}) \cdot \int_{t_0}^{t} \exp(x\mathrm{J}_2{}^{1/2}) \cdot (\mathrm{J}_1{}^{1/2})^{-1}\,\mathbf{h}(x)dx \; +$$

$$+ \frac{1}{2} \exp(t\,\mathrm{J}_1{}^{1/2}) \int_{t_0}^{t} \exp(x\,\mathrm{J}_1{}^{1/2}) \cdot (\mathrm{J}_2{}^{1/2})^{-1}\,\mathbf{h}(x)dx$$

to es un punto arbitrario.

Así, ya se conocen las q componentes de un vector **Y**o, solución particular de (17). Una solución particular de (1) será

$$\mathbf{X}_0 = \mathrm{P}\,\mathbf{Y}_0$$

con lo que queda resuelto completamente (1).

Corolario.—Si B es no singular, siendo (2) su forma de Jordán, la solución general de (1) es

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\exp(t(\mathrm{J}_1{}^{1/2}) \cdot \int_{t_0}^{t} \exp(x\,\mathrm{J}_2{}^{1/2}) \cdot (\mathrm{J}_1{}^{1/2})^{-1}\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathbf{b}(x)dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\exp(t\,\mathrm{J}_2{}^{1/2}) \int_{t_0}^{t} \exp(x\,\mathrm{J}_1{}^{1/2}) \cdot (\mathrm{J}_2{}^{1/2})^{-1}\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathbf{b}\,(x)dx +$$

$$+ \mathrm{P}\,\exp(t\,\mathrm{J}_1{}^{1/2})\,\mathbf{a}_1 + \mathrm{P}\,\exp(t\,\mathrm{J}_2{}^{1/2})\,\mathbf{a}_2$$

Agradecemos al Profesor Sr. A. Dou la ayuda y dirección que nos ha prestado en la composición de esta nota.

BIBLIOGRAFIA

[1] DOU, A.—*Ecuaciones diferenciales ordinarias.* Editorial Dossat, S. A., Madrid, 1964. Capítulo III. Páginas 95-101, 108-113, 129-131, 135-137.

[2] VALLE, A.—Sobre la forma canónica de Jordán, correspondiente a una matriz cuadrada y a las matrices no singulares que relacionan ambas. *Gaceta Matemática* (Revista del Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas y de la Real Sociedad Matemática Española). C. S. I. C. Patronato «Alfonso el Sabio». 1.ª serie, Tomo XVI; 1 y 2; páginas 20-34.