PROBLEMAS DE CONTORNO ELIPTICOS

Por
ANTONIO VALLE SÁNCHEZ

Pretendemos en esta nota presentar las líneas básicas del tratamiento actual de una gran variedad de problemas de contorno lineales relativos a ecuaciones diferenciales de tipo elíptico.

El criterio que se va a seguir es esencialmente heurístico, pero es necesario advertir desde el primer momento, que en éste, como en los restantes campos de la Matemática de nuestros días, las técnicas de trabajo que se utilizan requieren, por su gran potencia, el uso de conceptos fundamentales de cierta dificultad. Puede intentarse, y esa es nuestra idea en el caso presente, sacar el máximo partido al menor número de elementos, pero dicho número mínimo no puede soslayarse.

No debe pensarse que la construcción de estas teorías generales sea simplemente un pasatiempo apto para matemáticos, sin transcendencia práctica. A este respecto es conocido el hecho de que muchas situaciones físicas que no encontraban un modelo matemático adecuado en el Análisis clásico, han quedado perfectamente encuadradas en la Teoría de distribuciones. De otra parte, es sintomático que los métodos del Análisis numérico se apliquen con éxito a las ecuaciones diferenciales abstractas.

Suele ser la mayor dificultad para quienes se inician en el estudio de estas cuestiones, encontrar exposiciones a un nivel conveniente, dado que la casi totalidad de la literatura es de carácter especializado. Además es un deseo lógico el querer conectar la teoría formal con los casos clásicos correspondientes, para ver cómo efectivamente quedan incluidos en ella. Intentamos facilitar ambos objetivos a los eventuales lectores, a quienes, para un primer estudio serio en esta materia, remitimos a [2].

Si nos limitamos por ahora a algunas consideraciones sobre los problemas de contorno de tipo elíptico más clásicos, es con el propósito de dedicar otra nota a ciertos aspectos de los mismos problemas en conexión con ecuaciones de evolución.

1. Dos ejemplos elementales

Permítasenos partir de un par de problemas de contorno familiares en la Física Matemática y extraer de su consideración ciertas consecuencias.

1.1. *Ejemplo 1*

Sea la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden del tipo Sturm-Liouville:

$$\left.\begin{array}{l} (-D^2 + \lambda)u = f \\ D = \dfrac{d}{dx}, \ \lambda \text{ número real positivo} \end{array}\right\} \qquad (1,1)$$

donde la función $x \rightarrow f(x)$ del segundo miembro es un dato, en tanto que $x \rightarrow u(x)$ representa una cierta función incógnita. Ambas reales, de una variable real.

Supongamos que en los extremos del intervalo $[x_1, x_2]$ se imponen unas condiciones de contorno homogéneas de las llamadas de Sturm y de primera especie [5](*), o sea:

$$u(x_1) = u(x_2) = 0 \qquad (1,2)$$

y se desea estudiar la posibilidad de existencia de solución única de (1,1), (1,2).

El problema puede plantearse en los siguientes términos:

Considérese el espacio vectorial real H de las funciones continuas en $[x_0, x_1]$ y V constituido por aquellas funciones de *clase dos* en el mismo intervalo, tales que verifiquen (1,2) en los bordes del mismo. Algebraicamente V es, pues, un subespacio de H y el operador diferencial $T = -D^2 + \lambda$ establece un homomorfismo de V en H, siendo en general $T(V) \subset H$.

Fijado un elemento arbitrario $f \varepsilon$ H, ¿cuándo existirá un único elemento $u \in V$, tal que se tenga (1,1)? Nótese cómo el cumplimiento de (1,2) va implícito en el hecho de pertenecer la solución al espacio V.

Evidentemente, condición necesaria y suficiente para ello es que T sea un *isomorfismo* de V *sobre* H. En tal caso, llamando T^{-1} al isomorfismo inverso de T, la solución única del problema (1,1), (1,2) viene dada por:

$$u = T^{-1}(f) \qquad (1,3)$$

En el ejemplo que consideramos, T es en efecto un isomorfismo de V sobre H. La construcción de T^{-1} se realiza entonces bajo forma

(*) Concretamente, a lo largo de esta nota se requiere el conocimiento del Cap. I, Cap. III y Cap. IV núm. 3.

ntegral, con ayuda de la llamada función de Green [5](y con más generalidad [1]), obteniéndose:

$$u(x)=\int_{x_1}^{x_2} G(x, \xi)f(\xi)d\xi \tag{1,4}$$

1.2. *Ejemplo 2*

Sea ahora la ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden y tipo elíptico:

$$\left.\begin{aligned} &(-\Delta+1)u=f \\ &\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2_1} + \frac{\delta^2}{\delta x^2_2} + \dots + \frac{\delta^2}{\delta x^2_n} \end{aligned}\right\} \tag{1,5}$$

Como es sabido, a Δ se le denomina operador armónico de Laplace, soliendo utilizarse el nombre de *metarmónico* para todos los de la forma $-\Delta + \lambda$, donde λ es cualquier número no nulo, en nuestro caso se ha elegido $\lambda = 1$. Se trata del operador diferencial de segundo orden y tipo elíptico más usual.

Supóngase Ω abierto «muy regular» de R^n, en el sentido de que su frontera Γ sea una hipersuperficie cumpliendo todas las condiciones de regularidad necesarias. $\overline{\Omega}$ designará su adherencia.

$x=(x_1, x_2, \dots x_n) \to f(x)$ es una función real dada, continua en $\overline{\Omega}$, y $x \to u(x)$ representa la incógnita. Se trata de estudiar la existencia de soluciones de (1,5) que verifiquen la siguiente condición de contorno sobre Γ:

$$u|_\Gamma = 0 \tag{1,6}$$

designando $u|_\Gamma$ la restricción o *traza* de la función u sobre Γ.

El problema (1,5), (1,6) se llama problema de Dirichlet homogéneo relativo al operador metarmónico y es evidentemente una generalización del tratado en el ejemplo 1, al caso en que el número de dimensión es igual o mayor de dos.

Formulémoslo en otros términos.

Sea H el espacio vectorial real de las funciones continuas sobre $\overline{\Omega}$ y V el constituido por aquellas funciones de clase dos en $\overline{\Omega}$ que dan traza nula sobre Γ. Evidentemente, $V \subset H$ y la situación es exactamente una reproducción de la del ejemplo anterior. T establece un isomorfismo de V sobre H, y el problema (1,5), (1,6) posee solución única. La construcción efectiva de T^{-1} es, en general, muy complicada, a menos que Ω tenga una estructura geométrica sencilla. (Véase, por ejemplo [3], Cap. 4).

1.3. En la orientación dada a los problemas anteriores, podemos decir que se pone de relieve el aspecto algebraico de los mismos; pero V y H son espacios vectoriales funcionales, susceptibles de ser dotados de una topología, entonces se podrán considerar aplicaciones lineales de V, en H *continuas* o *acotadas* y otras que no gozarán de tal propiedad; caso el más frecuente cuando se trata de operadores diferenciales. Para las del último tipo no tiene sentido hablar de la aplicación inversa y es necesario encontrar *algo* que haga sus veces, con vistas a la resolución del correspondiente problema. Por otra parte, la posibilidad de obtener soluciones de muchos problemas de contorno similares a los expuestos, en espacios de entes más generales que las funciones, en particular de distribuciones, puede cifrarse precisamente en la consideración de una pareja V y H de espacios hilbertianos. Recordamos, pues, sumariamente, definiciones relativas a ciertos espacios funcionales, introduciendo también algunas —muy pocas— nuevas.

2. Ciertos espacios funcionales

2.1. Ω designará siempre en este apartado un abierto (no necesariamente acotado) de R^n. Las funciones tratadas estarán definidas sobre Ω con valores complejos (en particular pueden ser reales).

Definición 2.1. Se denomina *soporte* de una función φ y se designará por sop $[\varphi]$, el menor conjunto cerrado de R^n, fuera del cual φ toma el valor cero:

$$\text{sop}\ [\varphi] = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}} \qquad (2,1)$$

Definición 2.2. Con $D(\Omega)$ se representará el espacio vectorial de las funciones φ, tales que:

a) φ es indefinidamente diferenciable en Ω.

b) sop $[\varphi]$ es un compacto (cerrado y acotado) contenido en Ω.

c) Está dotado de la llamada topología de Schwartz (*).

Definición 2.3. Se denomina *distribución* sobre Ω y su conjunto se denota $D'(\Omega)$, a toda aplicación lineal T, de $D(\Omega)$ en el cuerpo complejo C, *continua* en el sentido de que

$$\{\varphi_m\} \to \varphi \quad \text{en} \quad D(\Omega) \Rightarrow T(\varphi_m) \to T(\varphi) \qquad (2,2)$$

Las distribuciones son, pues, funcionales, lineales y continuos sobre $D(\Omega)$.

(*) Según la cual se dice que la sucesión $\{\varphi_m\}$ converge a φ en $D(\Omega)$ sí y sólo si

1.º sop $[\varphi_m]$ $\forall m$, y sop $[\varphi]$ están contenidos en un conjunto acotado contenido a su vez en Ω.

2.º La sucesión $\{D\varphi_m\}$ converge *uniformemente* a $D\varphi$. D representa una derivada cualquiera de orden también arbitrario.

La teoría general de espacios vectoriales topológicos pone de manifiesto que realmente no se define así una verdadera topología, de ahí el nombre de *pseudotopología* que suele atribuírsele.

Véase [4].

Existe un tipo particular de distribuciones de gran interés, son las generadas por *funciones localmente sumables* (*). Sea f una de este tipo, se prueba que mediante:

$$\left.\begin{aligned} Tf(\varphi) &= \int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx \\ \varphi \varepsilon D(\Omega);\ dx &= dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n \end{aligned}\right\} \qquad (2,3)$$

se define realmente una distribución. Toda otra función que sea *casi igual* (es decir, igual, salvo eventualmente sobre un conjunto de medida nula) a f, genera la misma distribución.

Definición 2.4. [4]. A partir de *cualquier distribución*, se definen nuevas *distribuciones derivadas* de ella mediante:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta T}{\delta x_i}(\varphi) &= -T\left(\frac{\delta \varphi}{\delta x_i}\right) \\ \varphi &\in D(\Omega) \end{aligned}\right\} \qquad (2,4)$$

Nótese la profunda diferencia con el cálculo diferencial clasico, donde una función no tiene por qué admitir derivadas.

Las derivadas de órdenes superiores se definen de un modo natural a la vista de (2,4).

Definición 2.5. [4], [5]. $L^2(\Omega)$ designa el espacio vectorial cuyos elementos son (clases de) funciones cuyo cuadrado es sumable en el sentido de Lebesgue:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < +\infty \qquad (2,5)$$

dotado de la norma:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx\right)^{1/2} \qquad (2,6)$$

que le confiere estructura de *espacio de Hilbert*.

Se trata realmente del espacio *funcional* hilbertiano más sencillo e importante, por cuya razón es necesario decir dos palabras sobre sus propiedades más notables. Se verifican los siguientes:

Teorema 2.1. Todo elemento de $L^2(\Omega)$ es localmente sumable en Ω y, en consecuencia, genera una distribución. *Algebraicamente:*

$$L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega). \qquad (2,7)$$

Teorema 2.2. El espacio $D(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$.

(*) Una función f se dice localmente sumable en Ω, si en todo subconjunto acotado medible suyo existe y es finita su integral de Lebesgue.

Es decir, que todo elemento de $L^2(\Omega)$ puede ser asimilado a una función de $D(\Omega)$ o bien es *límite* en la topología generada por la norma (2.6) de una sucesión de funciones de dicho espacio.

2.2. Es necesario introducir un nuevo espacio de Hilbert.

Definición 2.6. Sea el espacio vectorial cuyos elementos son (clases de) funciones de cuadrado sumable en Ω, tales que las derivadas primeras de las distribuciones generadas por ellos pueden identificarse a nuevos elementos de $L^2(\Omega)$.

Se eligen, pues, aquellos elementos $u \in L^2(\Omega)$ para los cuales es:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta T_u}{\delta x_i}(\varphi) = \int_\Omega v_i(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx \\ &v_i \in L^2(\Omega) \end{aligned}\right\} \qquad (2,8)$$

Este espacio vectorial es denotado por $H^1(\Omega)$, tras haber sido dotado de la norma:

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u(x) |^2 dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega | v_i(x) |^2 dx \right)^{1/2} . \qquad (2,9)$$

Teorema 2.3. El espacio $H^1(\Omega)$, es hilbertiano.

Demostración. Admitido que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y teniendo presente la definición 2.4, no ofrece especial dificultad la conclusión.

Se dice que $H^1(\Omega)$ es un espacio del tipo de *Sobolev* y, a diferencia de lo establecido en el teorema 2.2, en general, no se verifica que $D(\Omega)$ sea denso en él.

Definición 2.7. Con $H^1_0(\Omega)$ se designa el subespacio hilbertiano de $H^1(\Omega)$, adherencia con respecto a la topología inducida por (2,9), del espacio $D(\Omega)$.

Insistimos de nuevo en que, generalmente, $H^1_0(\Omega)$ es un subespacio *propio* de $H^1(\Omega)$. En ciertos casos se tiene la coincidencia, tal ocurre, *por ejemplo*, cuando $\Omega \equiv R^n$.

Corolario 2.3. Consecuencia inmediata de los teoremas 2.2, 2.3 y de la definición 2.7, es que tanto $H^1_0(\Omega)$, como $H^1(\Omega)$ son densos *en* $L^2(\Omega)$, lo que se necesitará en el apartado 4.

2.3. Para terminar con este resumen sobre espacios funcionales y dado que $H^1_0(\Omega)$ parece el más artificioso de los introducidos, tomemos el caso muy simple de una sola variable y $\Omega =]0.1[$ en el cual se puede elementalmente analizar su estructura.

Por definición, los elementos de $H^1_0(]0,1[)$ son funciones de $D(]0,1[)$ o bien «límites» de ellas en H^1.

Ahora bien, $\forall \varphi \in D(]0,1[)$ se puede escribir:

$$x \in [0,1] \quad , \quad \varphi(x) = \int_0^x \varphi'(y) dy \qquad (2,10)$$

$$| \varphi(x) | = \left| \int_0^x \varphi'(y) dy \right| \leqslant \int_0^x | \varphi'(y) | \, dy \leqslant \int_0^1 | \varphi'(x) | \, dx \qquad (2.11)$$

y como

$$\left.\begin{array}{r}[|\varphi'|] \in L^2(]0,1[) \\ [1] \in L^2(]0,1[)\end{array}\right\} \qquad (2,12)$$

(2,11) puede interpretarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\varphi'(x)| &= ([|\varphi'|],[1])_{L^2(]0,1[)} \leqslant \\ &\leqslant \|[\varphi']\|_{L^2(]0,)1[)} \|[1]\| = \|[\varphi']\|_{L^2}\end{aligned} \qquad (2,13)$$

donde el paréntesis representa el producto escalar en L^2 y en el último paso se ha utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

En consecuencia, también

$$\sup_{x \in]0,1[} |\varphi(x)| \leqslant \|[\varphi']\|_{L^2},$$

y como de (2,6) y (2,9) se deduce:

$$\|[\varphi']\|_{L^2} \leqslant \|[\varphi]\|_{H^1}$$

se obtiene en definitiva que:

$$\sup_{x \in]0,1[} |\varphi(x)| \leqslant \|[\varphi]\|_{H^1}. \qquad (2,14)$$

Si pues un elemento u de H^1_0 pertenece a $D(]0,1[)$, en los extremos del intervalo, evidentemente, se anula. Si no perteneciera a dicho espacio existiría una sucesión $\{\varphi_m\}$ tal que

$$\{\varphi_m\} \xrightarrow{H^1} u \qquad (2,15)$$

y en virtud de (2,14), ello implicaría la convergencia *uniforme* de $\{\varphi_m\}$ a u, y en consecuencia como $\varphi_m(0) = \varphi_m(1) = 0$, se tendría

$$u(0) = u(1) = 0 \qquad (2,16)$$

La nota común a los elementos de H^1_0, es, pues, la de *anularse* en la *frontera* de $]0,1[$. (*)

Este hecho es general, pero no es fácil precisar en qué sentido los elementos de H^1_0 son aquellos que perteneciendo a $H^1(\Omega)$ se «anulan» sobre la frontera.

Desde un punto de vista intuitivo, se vislumbra perfectamente cuál puede ser el interés del espacio $H^1_0(\Omega)$ en relación con su aplicación a los problemas de contorno.

(*) En virtud de un teorema muy general, los elementos de H^1 pueden ser identificados a funciones continuas en $[0,1]$. De esta forma (2,16) tiene perfecto sentido.

3. Teoria formal

3.1. Sean V y H dos espacios de Hilbert dados, de forma que

$$V \subset H \qquad (3,1)$$

El signo $\subset$ implica no solamente la inclusión algebraica por otra parte, no necesariamente propia, sino también la topológica, siendo, pues, continua o acotada la *inyección* de V en H. Esto significa que si es i dicha inyección:

$$\begin{array}{c} V \xrightarrow{i} H \\ v \longrightarrow i(v) = v \end{array}$$

$$\| i(v) \|_H = \| v \|_H \leqslant k \| v \|_V, \quad \forall v \in V \qquad (3,2)$$

donde k es un cierto número real positivo.

Se supondrá además:

$$V \text{ *denso* en } H \qquad (3,3)$$

En lo sucesivo, si u y v son dos elementos de V, $((u, v))$ designara su producto escalar y $\|u\| = ((u, u))^{1/2}$; análogamente si $f, g \in H$, (f, g) denotará su producto escalar y $|f| = (f, f)^{1/2}$. Así, pues (3,2), queda escrita en la forma:

$$\exists k > 0, \quad \text{tal que} \quad \forall v \in V, \quad |v| \leqslant k \| v \|. \qquad (3,4)$$

Se da también una transformación u operador lineal *acotado* [5] $\mathscr{A}$ de V en V, lo que se representa escribiendo:

$$\mathscr{A} \in \mathscr{L}(V, V) \qquad (3,5)$$

Definición 3.1. Llamaremos una *terna de LIONS* al conjunto de tres elementos, constituido por dos espacios hilbertianos que verifican (3,1) y (3,3) y un operador del tipo (3,5).

$\{ V, H, \mathscr{A} \}$ es, pues, una terna de LIONS.

Su consideración va a ser el punto de partida para la construcción de un nuevo operador A, en las condiciones que se van a indicar, y que desempeñará el papel fundamental en esta teoría.

Teorema 3.1. La condición necesaria y suficiente para que $\mathscr{A}$ admita un operador inverso también acotado $\mathscr{A}^{-1}$, es que verifique la condición de *coercividad:*

$$\forall v \in V, \ | ((\mathscr{A}v, v)) | \geqslant \alpha \| v \|^2, \ \alpha > 0 \qquad (3,6)$$

En otros términos (3,6), es *equivalente* al hecho de ser $\mathscr{A}$ un isomorfismo *algebraico* y *topológico* de V *sobre* sí mismo.

Sea ahora el subespacio de V, constituido por aquellos elementos tales que para cada uno de ellos, la correspondiente aplicación antilineal ([5], pág. 6) $v \to ((\mathscr{A}u, v))$ es continua o acotada sobre V, respecto a la topología inducida por H. Es decir, se considera el conjunto:

$$\{ u \in V \mid \forall v \in V, \ |((\mathscr{A}u, v))| \leqslant k_1 |v|, \ k_1 \text{ fijo} \} \qquad (3,7)$$

En virtud de (3,3), dichas aplicaciones antilineales pueden prolongarse con continuidad a todo H y por el teorema fundamental de Riesz ([5], pág. 19), se podrán escribir:

$$\left.\begin{array}{l}\forall h \in \mathrm{H},\ h \rightarrow (h_u,\ h) \\ h_u \text{ fijo en H}\end{array}\right\} \qquad (3,8)$$

de forma que *en particular:*

$$v \rightarrow (h_u,\ v) = ((\mathscr{A}u,\ v)) \qquad (3,9)$$

Puede ahora considerarse la aplicación A del conjunto (3,7), denotado brevemente por D(A), en H, tal que:

$$u \in \mathrm{D(A)} \xrightarrow{\mathrm{A}} h_u = \mathrm{A}u \qquad (3,10)$$

En general, esta aplicación A no tiene por qué ser acotada. Nótese, pues, que no existe el menor parecido entre $\mathscr{A}$ y A.

Se verifica el siguiente:

Teorema 3.2. Dada la terna de LIONS $\{\mathrm{V},\ \mathrm{H},\ \mathscr{A}\}$, donde $\mathscr{A}$ verifica (3,6), para cada $f \varepsilon \mathrm{H}$ existe un *único* elemento $u \in \mathrm{D(A)}$, tal que:

$$\mathrm{A}u = f \qquad (3,11)$$

La ecuación funcional (3,11) admite, pues, solución única en D(A).

Obsérvese que éste es casi un teorema de isomorfismo; lo único que le falta es la no existencia, en general, de A^{-1}.

¿Cómo obtener la solución única de (3,11)?

Basta considerar el operador $\mathrm{J} \in \mathscr{L}(\mathrm{H},\ \mathrm{V})$ definido $\forall v \in \mathrm{V}$ por:

$$(f,\ v) = ((\mathrm{J}f,\ v)) \quad f \in \mathrm{H} \qquad (3,12)$$

y de (3,11), (3,12) resulta:

$$(\mathrm{A}u,\ v) = (f,\ v) = ((\mathscr{A}u,\ v)) = ((\mathrm{J}f,\ v))$$

por tanto:

$$u = \mathscr{A}^{-1}\mathrm{J}(f) \qquad (3,13)$$

Definición 3.2. $\mathscr{A}^{-1}\mathrm{J}$, se dirá *operador de Green* asociado a A.

3.2. Se comprende fácilmente que, en relación con las ecuaciones diferenciales, la terna $\{\mathrm{V},\ \mathrm{H},\ \mathscr{A}\}$ debe ser elegida de manera que A sea un operador diferencial. La gran libertad que, no obstante lo anterior, queda para su elección, es causa de que pueda obtenerse una enorme variedad de problemas de contorno. Más aún, se podrán plantear las cosas de forma que para un *mismo A*, se obtengan *distintos* problemas de contorno. En la práctica, el elemento $\mathscr{A}$ de la terna suele venir dado de forma implícita, como pondrán de manifiesto las aplicaciones.

He aquí, en esquema, una teoría *sintética* de problemas de contorno, donde no se tiene «a priori» la ecuación diferencial como en la teoría clásica, sino que se *obtiene* a partir de ciertos elementos dados.

La dificultad técnica mayor para caracterizar el problema de contorno correspondiente a una terna elegida, se presentará en la interpretación de D(A). Es una cuestión de «saber leer» el significado de $u \in D(A)$.

Una última observación; aunque aquí no hagamos uso de ella. El espacio H puede ser sustituido por un espacio de Banach, en tanto que es fundamental el carácter hilbertiano de V.

4. Aplicaciones

4.1. Tomemos $H = L^2(]x_1x_2[)$ y $V = H^1_0(]x_1x_2[)$ (véase 2.3).

Se define $\mathcal{A}$ implícitamente por:

$$\left.\begin{aligned} &((\mathcal{A}u,\ v)) = \int_{x_1}^{x_2} Du(x)\overline{Dv(x)}dx + \lambda \int_{x_1}^{x_2} u(x)\overline{v(x)}dx \quad (^*) \\ &D = \frac{d}{dx} \ ; \quad u,v \in V; \quad \lambda \text{ número complejo.} \end{aligned}\right\} \quad (4,1)$$

a) Fijado v, la *linealidad* de A es consecuencia de la de (4,1).

b) Probemos la *continuidad;* para ello es necesario demostrar la existencia de $k^* > 0$ tal que:

$$||\mathcal{A}u|| \leqslant k^*||u|| \qquad \forall u \in V \qquad (4,2)$$

ahora bien:

$$|((\mathcal{A}u,\ v))| = \left| \int_{x_1}^{x_2} Du(x) \cdot \overline{Dv(x)}dx + \lambda \int_{x_1}^{x_2} u(x)\overline{v}(x)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_1}^{x_2} Du(x) \cdot \overline{Dv(x)}dx \right| + |\lambda| \left| \int_{x_1}^{x_2} u(x) \cdot \overline{v}(x)dx \right| \qquad (4,3)$$

y teniendo en cuenta la desigualdad de Cauchy-Schwarz relativa a H:

$$(4,3) \quad \leqslant \left(\int_{x_1}^{x_2} |\ Du(x)\ |^2\ dx \right)^{1/2} \left(\int_{x_1}^{x_2} |\ Dv(x)\ |^2\ dx \right)^{1/2} +$$

$$+ |\lambda| \left(\int_{x_1}^{x_2} |\ u(x)\ |^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{x_1}^{x_2} |\ v(x)\ |^2 dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \text{máx}\ (1,\ |\lambda|)\ [\ |Du| \cdot |Dv| + |u| \cdot |v|\ ] \qquad (4,4)$$

como:

$$\left.\begin{aligned} ||\ u\ || &= (\ |\ u\ |^2 + |\ Du\ |^2)^{1/2} \\ ||\ v\ || &= (\ |\ v\ |^2 + |\ Dv\ |^2)^{1/2} \end{aligned}\right. \qquad (4,5)$$

(*) La barra sobre Dv y sobre v denota el complejo conjugado; en el caso real desaparecen.

de (4,4) y (4,5) resulta:

$$\left.\begin{aligned} &|((\mathcal{A}u,\ v))| \leqslant k^{*}\ \|u\|\cdot\|v\| \\ &k^{*} = \text{máx}\,(1,\ |\lambda|) \end{aligned}\right. \tag{4,6}$$

como se comprueba, sin más que elevar al cuadrado.

c) Coercividad. Veamos que si $Re\ \lambda > 0$, se verifica (3,6) para

$$\alpha = \min\,(1,\ Re\ \lambda)$$

En efecto:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} |\mathrm{D}v(x)|^2 dx + \lambda \int_{x_1}^{x_2} |v(x)|^2 dx \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \int_{x_1}^{x_2} |\mathrm{D}v(x)|^2 dx + Re\lambda \int_{x_1}^{x_2} |v(x)|^2 dx \right| \geqslant \text{mín}\,(1, Re\lambda)\ \|v\|^2, \tag{4,7}$$

de donde la afirmación.

Consecuencia: $\mathcal{A}$ es un isomorfismo algabraico y topológico de $H^1_0(]x_1x_2[)$ *sobre* sí mismo y $\{$ V, H, $\mathcal{A}$ $\}$ una terna de LIONS.

Obtengamos A Para lo cual de $((\mathcal{A}u,\ v)) = (Au,\ v)$ se deduce:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{D}u \cdot \overline{\mathrm{D}v}dx + \lambda \int_{x_1}^{x_2} u \cdot \overline{v}dx = \int_{x_1}^{x_2} u \cdot A\overline{v}dx \tag{4,8}$$

y suponiendo $v \in D\ ]x_1,x_2[$ para poder integrar por partes el primer sumando:

$$\int_{x_1}^{x_2} (-\mathrm{D}^2 + \lambda)u \cdot \overline{v}dx = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{A}u \cdot \overline{v}dx$$

con lo cual se reencuentra el operador diferencial

$$\mathrm{A} = -\mathrm{D}^2 + \lambda \tag{4,9}$$

de 1, ejemplo 1.

¿Qué será D(A)? Se sabe que un subespacio de V, tal que si $u \in \mathrm{D(A)}$,

$$\mathrm{A}u = (-\mathrm{D}^2 + \lambda)u \in \mathrm{H} \tag{4,10}$$

lo que implica

$$\mathrm{D}^2 u \in \mathrm{H} \tag{4,11}$$

D(A) es, pues, el subespacio de $H^1_0(]x_1x_2[)$ constituido por aquellos elementos cuya *derivada segunda* pertenece a $L^2(]x_1x_2[)$. (*)

La ecuación (3,11) tiene en nuestro caso, para cada f fija en $L^2(]x_1x_2[)$, una solución única en D(A); es decir, tal que se anula en x_1 y x_2 y sus derivadas hasta la segunda incluida, *en sentido generalizado*, pertenecen a $L^2(]x_1x_2[)$.

Este resultado es la *réplica exacta* de lo expuesto en el Ejemplo 1.

(*) Definiendo el espacio de Sobolev $H^2(]x_1x_2[)$. resulta $\mathrm{D(A)} = H^1_0 \cap H^2$.

4.2. Ω abierto de R^n, de frontera «muy regular».
$H = L^2(\Omega)$; $V = H^1_0(\Omega)$. $\mathcal{A}$ dado implícitamente por:

$$((\mathcal{A}u, v)) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\delta u}{\delta x_i} \cdot \frac{\delta \overline{v}}{\delta x_i} \cdot dx + \int_{\Omega} u \cdot \overline{v} dx \qquad (4,12)$$

Se prueba que $\mathcal{A}$ es elemento de $\mathcal{L}(V,V)$ que cumple la condición (3,6). La demostración es más sencilla que en el caso anterior, por haberse tomado $\lambda = 1$.

Determinemos A. De $((\mathcal{A}u, v)) = (Au, v)$ se obtiene, suponiendo que $v \in D(\Omega)$,

$$-\int_{\Omega} \Delta\, u \cdot \overline{v} dx + \int_{\Omega} u \cdot \overline{v} dx = \int_{\Omega} Au \cdot \overline{v} dx \qquad (4,13)$$

de donde el operador metarmónico de 1, Ejemplo 2:

$$A = -\Delta + 1 \qquad (4,14)$$

D(A), estaría aquí formado por aquellos elementos u de $H^1_0(\Omega)$, *«nulos» sobre* Γ, tales que

$$\Delta u \in L^2(\Omega) \qquad (4,15)$$

lo que no implica que por separado las derivadas segundas pertenezcan a $L^2(\Omega)$:

$$D(A) = H^1_0(\Omega) \cap \{ u \varepsilon L^2(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega) \}. \qquad (4,16)$$

Se ha obtenido el problema de Dirichlet homogéneo generalizado.

4.3. Finalmente. H y $\mathcal{A}$ como en 4.2. $V = H^1(\Omega)$.

También $\{ H^1(\Omega), L^2(\Omega), \mathcal{A} \}$ constituye una terna de LIONS que da origen al mismo $A = -\Delta + 1$.

Ahora bien $u \varepsilon D(A)$ implica:

$$\left.\begin{matrix} u \in H^1(\Omega) \\ \Delta u \in L^2(\Omega) \end{matrix}\right\} \qquad (4,17)$$

y además

$$-\int_{\Omega} \Delta\, u \cdot \overline{v} dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\delta u}{\delta x_i} \cdot \frac{\delta \overline{v}}{\delta x_i} dx \quad \forall v \varepsilon H^1(\Omega) \qquad (4,18)$$

Esta última relación es *evidente sólo* si $v \varepsilon D(\Omega)$ y por continuidad es cierta si $v \in H_0^1(\Omega)$ ya que $D(\Omega)$ es denso en dicho espacio, como ocurría en 4.2. Por el contrario, *ahora* es una *nueva condición* que se impone a u para pertenecer a D(A), de la cual por aplicación de la fórmula de Green

$$\left.\begin{matrix} -\int_{\Omega} \Delta\, u \cdot \overline{v} dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\delta u}{\delta x_.} \frac{\delta \overline{v}}{\delta x_.} dx - \int_{\Gamma} \frac{\delta u}{\delta n} \overline{v} dx \\ n \text{ normal a } \Gamma \end{matrix}\right\} \qquad (4,19)$$

se obtiene:

$$\int_{\Gamma} \frac{\delta u}{\delta n} \bar{v} dx = 0, \ \forall v \in H^1(\Omega) \qquad (4,20)$$

lo que viene a expresar en *cierto* sentido generalizado la clásica condición de *Neumann:*

$$\frac{\delta u|_{\Gamma}}{\delta n} = 0$$

4.4. La obtención de problemas no homogéneos del tipo de Dirichlet o Neumann, requiere algunas pequeñas modificaciones en la técnica seguida, generalmente la adición de algún sumando en la fórmula de definición de $\mathcal{A}$.

BIBLIOGRAFIA

[1]. DOU, A.—*Nociones sobre la función de Green y problemas de contorno.* (E. T. S. Ing. de Caminos).

[2]. LIONS, J. L.—*Ecuaciones diferenciales y problemas en los límites.* (Cursillo, en castellano, del Seminario Matemático de Barcelona).

[3]. SNEDDON, J.—*Elements of partial differential equations.* (Mac-Graw Hill Book).

[4]. VALLE, A.—*Integral de Lebesgue y teoría de distribuciones* (Cursillos del Instituto Jorge Juan).

[5]. VALLE, A.—*Ecuaciones integrales, problemas de contorno y ecuaciones en derivadas parciales de 2.º orden.* (Cursillos del Instituto Jorge Juan).