SOLUÇÃO DE $X^2 - Y^2 = Z^3$ EM INTEIROS

Por

Jayme Machado Cardoso

Lema 1. Todo inteiro múltiplo de 4 pode ser expresso como soma de dois ímpares consecutivos.

Demonstração. Trivial, pois $4x = (2x - 1) + (2x + 1)$.

Lema 2. Todo ímpar pode ser expresso como diferença dos quadrados de dois inteiros consecutivos.

Demonstração. Imediata, pois

$$2x - 1 = x^2 - (x - 1)^2.$$

Lema 3. A equação $x^3 = 2y$ não tem solução inteira para y ímpar.

Demonstração. Se x é par, x^3 é múltiplo de 8 e, portanto, y é par. Se x é ímpar, x^3 é, também, ímpar e não é possível que se tenha $x^3 = 2y$

Corolário. Nenhum cubo de inteiro é dobro de ímpar.

Proposição 1. Se z^3 pode ser expresso como produto de ímpares $z^3 = (2p - 1)(2q - 1)$, então

$$z^3 = (p + q - 1)^2 - (p - q)^2.$$

Demonstração. Se $z^3 = (2p - 1)(2q - 1)$, podemos escrever

$$z^3 = (2p - 1) + (2p - 1) + \dots + (2p - 1),$$

onde a soma tem $2q - 1$ parcelas. Aumentando a i-ésima,

$$i = 1, 2, \dots (2q - 1), \text{ parcela com } 2(q - i),$$

teremos

$$z^3 = [2(p + q - 1) - 1] + [2(p + q - 2) - 1] + \\ + \dots + [2(p - q - 1) - 1].$$

Pelo Lema 2,

$$2(p + q - i) - 1 = (p + q - i)^2 - (p + q - i - 1)^2.$$

Então, z^3 poderá ser expresso por uma soma de $2q-1$ diferenças de quadrados de inteiros consecutivos, tais que o minuendo de cada parcela é igual ao subtraendo da parcela que a precede. Assim,

$$z^3 = (p+q-1)^2 - (p-q)^2 \qquad \text{c.q.d.}$$

Proposição 2. Se z^3 pode ser expresso como produto de dois pares, $z^3 = (2p)(2q)$, então

$$z^3 = (p+q)^2 - (p-q)^2.$$

Demonstração. Se $z^3 = (2p)(2q)$, podemos escrever

$$z^3 = 2p + 2p + \ldots + 2p,$$

onde a soma tem $2q$ parcelas.

Aumentando a i-ésima, $i = 1, 2, \ldots, 2q$, parcela com $2(q-i)+1$, resulta para expressão de z^3

$$z^3 = [2(p+q)-1] + [2(p+q-1)-1] + \ldots + [2(p-q)+1],$$

onde cada parcela é ímpar. Pelo Lema 2. a i-ésima parcela pode ser escrita

$$2(p+q-i+1)-1 = (p+q-i+1)^2 - (p+q-i)^2.$$

Portanto, z^3 é soma de $2q$ diferenças de quadrados de inteiros consecutivos, tais que o minuendo de cada parcela é igual ao subtraendo da parcela que a precede. Assim,

$$z^3 = (p+q)^2 - (p-q)^2 \quad , \ \text{c.q.d.}$$

Observação. Não há outras possibilidades além das indicadas nas proposições 1 e 2, pois à $z^3 = (2p)(2q-1)$ não corresponde nenhuma solução. Realmente, conforme [1] o número de soluções de $x^2 - y^2 = z^3$ é o dobro da diferença entre o número de divisores pares e ímpares de z^3. Assim, as proposições 1 e 2 esgotam todas as possibilidades.

REFERÊNCIAS

[1] SIERPINSKI, W.: *Wiadomosci Matematyczne*, v. 11 (1907), Suplem p. 89-110.

Universidade do Paraná (Brasil).