UNA CARACTERIZACION DE TAUTOLOGIAS EN EL CALCULO PROPOSICIONAL CON TRES VALORES

Por F. M. Siocón

Alan Rose [2] proporcionó una caracterización teórica en términos de lattices del cálculo proposicional con tres valores asociando una proposición p por un par (A, B) de elementos de una álgebra Booleana de subconjuntos A y B, con A contenida en B. El conjunto A está aquí interpretado como el subconjunto del universo para el cual la proposición p es *cierta* y B el subconjunto para la cual la proposición no es falsa; esto es, para el cual es o cierto o tiene el tercer valor.

En este artículo ofreceremos otra descripción teórica en términos de conjuntos de proposiciones en el mismo cálculo donde una proposición p estará asociada por una partición $[p_0, p_1, p_2]$ del universo, U. Esto es, si $+$ denota la operación unión y yuxtaposición denota intersección, entonces $p_0p_1 = p_0p_2 = p_1p_2 = \emptyset$ y $p_0 + p_1 + p_2 = U$. El subconjunto p_i será entonces interpretado como la porción de U donde la proposición p toma el valor i $(i = 0, 1, 2)$. Si 0 es el valor designado, esto es *cierto*, entonces las proposiciones verdaderas estarán representadas por $[U, \emptyset, \emptyset]$. Creemos que esta interpretación es más directa y más natural. Como mostraremos en un artículo posterior, la idea completa es aplicable a cualquier cálculo proposicional en el que intervengan muchos valores.

Para poder demostrar que todas las tautologias del cálculo proposicional de tres valores se caracterizan por la partición $[U, \emptyset, \emptyset]$ es suficiente adoptar cualquier formulación que sea completa, débil y funcionalmente, y después mostrar que sus axiomas y las consecuencias de éstos a través de las reglas de inferencia son todas representables por la partición $[U, \emptyset, \emptyset]$. Se dice que una teoría es *completa débilmente* si sus tautologias son demostrables de sus axiomas por el uso de reglas de inferencia. La teoría es *completa fuertemente* si todas las fórmulas resultan demostrables cuando cualquier fórmula no demostrable está agregada a sus axiomas. Emil L. Post [1] ha probado que estas dos formas de completamiento son equivalentes en cualquier cálculo proposicional que sea *completo funcionalmente* en el sentido de que sus funciones primitivas generan por composición todas las demás funciones de un número finito de variables.

Consideraremos que la axiomatización está constituida por las reglas de inferencia, substitución y *modus ponens*, y los siguientes axiomas:

W_1. CpCqp
W_2. CCpqCCqrCpr
W_3. CCCpNppp
W_4. CCNqNpCpq
W_5. CTpNTp
W_6. CNTpTp

Los axiomas W_1 — W_4 son precisamente aquéllos de M. Wajsberg [4]. Estos axiomas forman un sistema completo débilmente, pero no completo fuertemente. Sin embargo, añadiendo la función proposicional T y los axiomas adicionales W_5 y W_6, J. Slupecki [3] demostró que el sistema se vuelve completo funcionalmente y de aquí completo fuertemente. Las tablas de valores de T (la función T de Slupecki), C (implicación) y N (negación), con 0 como el valor designado, son dados por

C	0	1	2	N	T
0	0	1	2	2	1
1	0	0	1	1	1
2	0	0	0	0	1

Por convención escribiremos $p \equiv [p_0, p_1, p_2]$ siempre que una proposición p esté asociada con una partición $[p_0, p_1, p_2]$. A continuación se presentan las particiones asociadas con cada una de las tres funciones primitivas:

$$\mathrm{C}pq \equiv [p_0q_0 + p_1q_0 + p_1q_1 + p_2,\ p_0q_1 + p_1q_2,\ p_0q_2]$$
$$\mathrm{N}p \equiv [p_2, p_1, p_0]$$
$$\mathrm{T}p \equiv [\varnothing, \mathrm{U}, \varnothing].$$

Las funciones A (disjunción), K (conjunción) de E. L. Post [2] se definen en términos de estas tres funciones citadas como sigue:

Kpq = NCCNpNqNq
Apq = CCpqq.

Consecuentemente, las particiones correspondientes pueden derivarse también en términos de aquellas Cpq, Np y Tp.

Por ejemplo, puesto que

$$\mathrm{N}p \equiv [p_2, p_1, p_0] \text{ y } \mathrm{N}q \equiv [q_2, q_1, q_0,]$$

entonces

$$\mathrm{CN}p\mathrm{N}q \equiv [p_2q_2 + p_1q_2 + p_1q_1 + p_0, p_2q_1 + p_1q_0, p_2q_0].$$

De esto, sigúe que

$$\begin{aligned}\mathrm{CCN}p\mathrm{N}q\mathrm{N}q \equiv {} & [(p_2q_2 + p_1q_2 + p_1q_1 + p_0)q_2 + (p_2q_1 + p_1q_0)q_2 + \\ & + (p_2q_1 + p_1q_0)q_1 + p_2q_0, (p_2q_2 + p_1q_2 + p_1q_1 + p_0)q_1 + \\ & + (p_2q_1 + p_1q_0)q_0, (p_2q_2 + p_1q_2 + p_1q_1 + p_0)q_0] = \\ & = [p_2q_0 + p_2q_1 + q_2, p_0q_1 + p_1q_0 + p_1q_1, p_0q_0].\end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned}\mathrm{K}pq = \mathrm{NCCN}p\mathrm{N}q\mathrm{N}q &\equiv [p_0q_0, p_0q_1 + p_1q_0 + p_1q_1, p_2 + q_2] = \\ &= [\sum_{\text{máx}(i,j)=0} p_iq_j, \sum_{\text{máx}(i,j)=1} p_iq_j, \sum_{\text{máx}(i,j)=2} p_iq_j].\end{aligned}$$

Similarmente, puesto que

$$\mathrm{C}pq \equiv [p_0q_0 + p_1q_0 + p_1q_1 + p_2, p_0q_1 + p_1q_2, p_0q_2],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{CC}pqq \equiv {} & [(p_0q_0 + p_1q_0 + p_1q_1 + p_2)q_0 + (p_0q_1 + p_1q_2)q_0 + \\ & + (p_0q_1 + p_1q_2)q_1 + p_0q_2, (p_0q_0 + p_1q_0 + p_1q_1 + p_2)q_1 + \\ & + (p_0q_1 + p_1q_2)q_2, (p_0q_0 + p_1q_0 + p_1q_1 + p_2)q_2] = \\ = {} & [p_0(q_0 + q_1 + q_2) + q_0(p_0 + p_1 + p_2), p_1q_1 + p_2q_1 + p_1q_2, p_2q_2] = \\ & = [p_0 + q_0, p_1q_1 + p_2q_1, p_1q_2, p_2q_2] = \\ & = [\sum_{\text{mín}(i,j)=0} p_iq_j, \sum_{\text{mín}(i,j)=1} p_iq_j, \sum_{\text{mín}(i,j)=2} p_iq_j].\end{aligned}$$

E. L. Post [1] ha demostrado también que cada una de las funciones A o K, juntas con una nueva negación definida por Mp = KCTppCpCpNp, constituyen un sistema de funciones completo funcionalmente para cualquier cálculo proposicional.

TEOREMA 1. *La colección de todas las particiones* $[p_0, p_1, p_2]$ *de* U *determinadas por todas las proposiciones del cálculo proposicional con tres valores forma un lattice distributivo bajo las operaciones definidas por las particiones asociadas con la Post conjunción y su disjunción, esto es,*

$$[p_0, p_1, p_2] \wedge [q_0, q_1, q_2] = [p_0q_0, p_0q_1 + p_1q_0 + p_1q_1, p_2 + q_2] \text{ y}$$
$$[p_0, p_1, p_2] \vee [q_0, q_1, q_2] = [p_0 + q_0, p_1q_1 + p_1q_2 + p_2q_1, p_2q_2].$$

Demostración. Recordemos que $\wedge$ y $\vee$ constituyen un lattice si cada uno de ellos satisfacen las leyes conmutativas, asociativas y de absorción. Las leyes de idempotencia son solamente consecuencias de éstas.

Las leyes conmutativas se desprenden fácilmente de la simetría de las definiciones citadas.

La ley asociativa correspondiente se verifica del modo siguiente:

$$
\begin{gathered}
[p_0, p_1, p_2] \wedge ([q_0, q_1, q_2] \wedge [r_0, r_1, r_2]) = \\
= [p_0, p_1, p_2] \wedge [\sum_{\text{máx}(j,k)=0} q_j r_k \,,\; \sum_{\text{máx}(j,k)=1} q_j r_k \,,\; \sum_{\text{máx}(j,k)=2} q_j r_k] = \\
= [\sum_{\text{máx}(i,n)=0} p_i(\sum_{\text{máx}(j,k)=n} q_j r_k) \,, \\
\sum_{\text{máx}(i,n)=1} p_i(\sum_{\text{máx}(j,k)=n} q_j r_k) \,,\; \sum_{\text{máx}(i,n)=2} p_i(\sum_{\text{máx}(j,k)=n} q_j r_k)] = \\
= [\sum_{\text{máx}(i,j,k)=0} p_i q_j r_k \,,\; \sum_{\text{máx}(i,j,k)=1} p_i q_j r_k \,,\; \sum_{\text{máx}(i,j,k)=2} p_i q_j r_k] = \\
= [\sum_{\text{máx}(n,k)=0} (\sum_{\text{máx}(i,j)=n} p_i q_j) r_k \,, \\
\sum_{\text{máx}(n,k)=1} (\sum_{\text{máx}(i,j)=n} p_i q_j) r_k \,,\; \sum_{\text{máx}(n,k)=2} (\sum_{\text{máx}(i,j)=n} p_i q_j) r_k] = \\
= [\sum_{\text{máx}(i,j)=0} p_i q_j \,,\; \sum_{\text{máx}(i,j)=1} p_i q_j \,,\; \sum_{\text{máx}(i,j)=2} p_i q_j] \wedge [r_0 \,, r_1 \,, r_2] = \\
= ([p_0 \,, p_1 \,, p_2] \wedge [q_0 \,, q_1 \,, q_2]) \wedge [r_0 \,, r_1 \,, r_2].
\end{gathered}
$$

La otra ley asociativa se verifica exactamente en la misma manera.

A continuación verificaremos una de las leyes de absorción:

$$
\begin{gathered}
([p_0 , p_1 , p_2] \vee [q_0 , q_1 , q_2]) \wedge [p_0 , p_1 , p_2] = \\
= [p_0 + q_0 , p_1q_1 + p_1q_2 + p_2q_1 , p_2q_2] \wedge [p_0 , p_1 , p_2] = \\
= [(p_0 + q_0)p_0 , (p_0 + q_0)p_1 + \\
+ (p_1q_1 + p_1q_2 + p_2q_1)(p_0 + p_1) , (p_0 + q_0)p_2 + \\
+ (p_1q_1 + p_1q_1 + p_1 q_2 + p_2q_2)p_2 + p_2q_2] = \\
= [p_0 , p_1(q_0 + q_1 + q_2) , p_2(q_0 + q_1 + q_2)] = [p_0 , p_1 , p_2].
\end{gathered}
$$

La prueba para la otra ley de absorción se omite, puesto que es similar.

Ahora verificaremos una de las dos leyes distributivas:

$$
\begin{gathered}
[p_0 , p_1 , p_2] \wedge ([q_0 , q_1 , q_2] \vee [r_0 , r_1 , r_2]) = \\
= [p_0 , p_1 , p_2] \wedge [\sum_{\text{mín}(j,k)=0} q_j r_k \,,\; \sum_{\text{mín}(j,k)=1} q_j r_k \,,\; \sum_{\text{mín}(j,k)=2} q_j r_k] = \\
= [\sum_{\text{máx}(i,n)=0} p_i(\sum_{\text{mín}(j,k)=n} q_j r_k) \,,\; \sum_{\text{máx}(i,n)=1} p_i(\sum_{\text{mín}(jk,)=n} q_j r_k) \,, \\
\sum_{\text{máx}(i,n)=2} p_i(\sum_{\text{mín}(j,k)=n} q_j r_k)] = \\
= [\sum_{\text{máx}(i,\text{mín}(j,k))=0} p_i q_j r_k ,\; \sum_{\text{máx}(i,\text{mín}(j,k))=1} p_i q_j r_k ,\; \sum_{\text{máx}(i,\text{mín}(j,k))=2} p_i q_j r_k] = \\
= [\sum_{\text{mín}(\text{máx}(i,j),\text{máx}(i,k))=0} p_i q_j p_i r_k \,,\; \sum_{\text{mín}(\text{máx}(i,j),\text{máx}(i,k))=1} p_i q_j p_i r_k \,, \\
\sum_{\text{mín}(\text{máx}(i,j),\text{máx}(i,k))=2} p_i q_j p_i r_k] = \\
= [\sum_{\text{máx}(i,j,)=0} p_i q_j \,,\; \sum_{\text{máx}(i,j)=1} p_i q_j \,,\; \sum_{\text{máx}(i,j)=2} p_i q_j] \vee \\
\vee [\sum_{\text{máx}(i,k)=0} p_i r_k \,,\; \sum_{\text{máx}(i,k)=1} p_i r_k \,,\; \sum_{\text{máx}(i,k)=2} p_i r_k] = \\
= ([p_0 , p_1 , p_2] \wedge [q_0 , q_1 , q_2]) \vee ([p_0 , p_1 , p_2] \wedge [r_0 , r_1 , r_2]).
\end{gathered}
$$

La otra ley distributiva se desprende de ésta y, por consiguiente, la prueba del teorema está ahora completa.

Ahora daremos la caracterización de las tautologías en el cálculo proposicional con tres valores.

TEOREMA 2. *Cualquier fórmula bien formada en el cálculo proposicional, con tres valores y formalizada por los axiomas* W_1-W_6 *y, por consiguiente, por cualquier conjunto completo de axiomas, es un tautología si está representado por la partición* $[U, \emptyset, \emptyset]$.

Demostración. Debemos demostrar que cada uno de los axiomas W_1-W_6 genera $[U, \emptyset, \emptyset]$ y, es más, que cualquier fórmula que resulte de estos axiomas por una aplicación de las dos reglas de inferencia, substitución y modus ponens. Verificaremos éstas una por una.

W_1. $$Cqp \equiv [q_0p_0 + q_1p_0 + q_1p_1 + q_2, q_0p_1 + q_1p_2, q_0p_2]$$

y de aquí que

$$\begin{gathered} CpCqp \equiv [p_0(q_0p_0 + q_1p_0 + q_1p_1 + q_2) + p_1(q_0p_0 + q_1p_0 + q_1p_1 + q_2) + \\ + p_1(q_0p_1 + q_1p_2) + p_2, p_0(q_0p_1 + q_1p_2) + p_1q_0p_2, p_0q_0p_2] = \\ = [p_0q_0 + p_0q_1 + p_0q_2 + p_1q_1 + p_1q_2 + p_1q_0 + p_2, \emptyset, \emptyset] = \\ = [p_0(q_0 + q_1 + q_2) + p_1(q_0 + q_1 + q_2) + p_2, \emptyset, \emptyset] = [U, \emptyset, \emptyset]. \end{gathered}$$

W_2. $$Cqr \equiv [q_0r_0 + q_1r_0 + q_1r_1 + q_2, q_0r_1 + q_1r_2, q_0r_2]$$

y

$$Cpr \equiv [p_0r_0 + p_1r_0 + p_1r_1 + p_2, p_0r_1 + p_1r_2, p_0r_2];$$

de aquí que

$$\begin{gathered} CCqrCpr \equiv [(q_0r_0 + q_1r_0 + q_1r_1 + q_2)(p_0r_0 + p_1r_0 + p_1r_1 + p_2) + \\ + (q_0r_1 + q_1r_2)(p_0r_0 + p_1r_0 + p_1r_1 + p_2) + \\ + (q_0r_1 + q_1r_2)(p_0r_1 + p_1r_2) + q_0r_2, (q_0r_0 + q_1r_0 + q_1r_1 + q_2)(p_0r_1 + p_1r_2) + \\ + (q_0r_1 + q_1r_2)p_0r_2, (q_0r_0 + q_1r_0 + q_1r_1 + q_2)p_0r_2] = \\ = [p_0q_0r_0 + p_1q_0r_0 + p_2q_0r_0 + p_0q_1r_0 + p_1q_1r_0 + p_2q_1r_0 + p_1q_1r_1 + p_2q_1r_1 + \\ + p_0q_2r_0 + p_1q_2r_0 + p_1q_2r_1 + p_2q_2 + p_1q_0r_1 + p_2q_0r_1 + p_0q_1r_1 + \\ + p_2q_1r_2 + p_1q_1r_2 + q_0r_2, p_0q_1r_1 + p_0q_2r_1 + p_1q_2r_2 + p_0q_1r_2, p_0q_2r_2]. \end{gathered}$$

O sea

$$\begin{gathered} CCpqCCqrCpr \equiv [(p_0q_0 + p_1q_0 + p_1q_1 + p_2)(p_0q_0r_0 + p_1q_0r_0 + p_2q_0r_0 + \\ + p_0q_1r_0 + p_1q_1r_0 + p_2q_1r_0 + p_1q_1r_1 + p_2q_1r_1 + p_0q_2r_0 + p_1q_2r_0 + p_1q_2r_1 + \\ + p_2q_2 + p_1q_0r_1 + p_2q_0r_1 + p_0q_0r_1 + p_2q_1r_2 + p_1q_1r_2 + q_0r_2) + \\ + (p_0q_1 + p_1q_2)(p_0q_0r_0 + p_1q_0r_0 + p_2q_0r_0 + p_0q_1r_0 + p_1q_1r_0 + p_2q_1r_0 + \\ + p_1q_1r_1 + p_2q_1r_1 + p_0q_2r_0 + p_1q_2r_0 + p_1q_2r_1 + p_2q_2 + p_1q_0r_1 + p_2q_0r_1 + \\ + p_0q_0r_1 + p_2q_1r_2 + p_1q_1r_2 + q_0r_2) + \\ + (p_0q_1 + p_1q_2)(p_0q_1r_1 + p_0q_2r_1 + p_1q_2r_2 + p_0q_1r_2) + p_0q_2, \\ (p_0q_0 + p_1q_0 + p_1q_1 + p_2)(p_0q_1r_1 + p_0q_2r_1 + p_1q_2r_2 + p_0q_1r_2) + \\ + (p_0q_1 + p_1q_2)p_0q_2r_2, (p_0q_0 + p_1q_0 + p_1q_1 + p_2)p_0q_2r_2] = \\ = [p_0q_0r_0 + p_0q_0r_1 + p_0q_0r_2 + p_1q_0r_0 + p_1q_0r_1 + p_1q_0r_2 + p_1q_1r_0 + p_1q_1r_1 + \\ + p_1q_1r_2 + p_2q_0r_0 + p_2q_1r_0 + p_2q_1r_1 + p_2q_2 + p_2q_0r_1 + p_2q_1r_2 + p_2q_0r_2 + \\ + p_0q_1r_0 + p_1q_2r_0 + p_1q_2r_1 + p_0q_1r_1 + p_0q_1r_2 + p_1q_2r_2 + p_0q_2, \emptyset, \emptyset] = \\ = [p_0q_0(r_0 + r_1 + r_2) + p_1q_0(r_0 + r_1 + r_2) + p_1q_1(r_0 + r_1 + r_2) + \end{gathered}$$

$$+ p_2q_0(r_0 + r_1 + r_2) + p_2q_1(r_0 + r_1 + r_2) + p_2q_2 +$$
$$+ p_0q_1(r_0 + r_1 + r_2) + p_1q_2(r_0 + r_1 + r_2) + p_0q_2, \varnothing, \varnothing] =$$
$$= [p_0q_0 + p_1q_0 + p_1q_1 + p_2q_0 + p_2q_1 + p_2q_2 + p_0q_1 + p_1q_2 + p_0q_2, \varnothing, \varnothing] =$$
$$= [p_0(q_0 + q_1 + q_2) + p_1(q_0 + q_1 + q_2) + p_2(q_0 + q_1 + q_2), \varnothing, \varnothing] = [\mathrm{U}, \varnothing, \varnothing].$$

W_3. $\mathrm{N}p \equiv [p_2, p_1, p_0]$

y de aquí que

$$\mathrm{C}p\mathrm{N}p \equiv [p_0p_2 + p_1(p_2 + p_1) + p_2, p_0p_1 + p_1p_0, p_0] = [p_1 + p_2, \varnothing, p_0]$$

Entonces,

$$\mathrm{CC}p\mathrm{N}pp \equiv [(p_1 + p_2)p_0 + p_0, (p_1 + p_2)p_1, (p_1 + p_2)p_0] = [p_0, p_1, p_2]$$

y de aquí que

$$\mathrm{CCC}p\mathrm{N}ppp \equiv [p_0p_0 + p_1p_0 + p_1p_1 + p_2, p_0p_1 + p_1p_2, p_0p_2] = [\mathrm{U}, \varnothing, \varnothing].$$

W_4 Puesto que $\mathrm{N}x \equiv [x_2, x_1. x_0]$,

entonces

$$\mathrm{CN}q\mathrm{N}p \equiv [q_2p_2 + q_1p_2 + q_1p_1 + q_0, q_2p_1 + q_1p_0, q_2p_0] =$$
$$= [p_2q_2 + p_2q_1 + p_1q_1 + q_0, p_1q_2 + p_0q_1, p_0q_2].$$

Consecuentemente,

$$\mathrm{CCN}q\mathrm{N}p\mathrm{C}pq \equiv [(p_2q_2 + p_2q_1 + p_1q_1 + q_0)(p_0q_0 + p_1q_0 + p_1q_1 + p_2) +$$
$$+ (p_1q_2 + p_0q_1)(p_0q_0 + p_1q_0 + p_1q_1 + p_2 + p_0q_1 + p_1q_2) + p_0q_2,$$
$$(p_2q_2 + p_2q_1 + p_1q_1 + q_0)(p_0q_1 + p_1q_2) +$$
$$+ (p_1q_2 + p_0q_1)p_0q_2, (p_2q_2 + p_2q_1 + p_1q_1 + q_0)p_0q_2] =$$
$$[p_2q_2 + p_2q_1 + p_1q_1 + p_0q_0 + p_1q_0 + p_2q_0 + p_1q_2 + p_0q_1 + p_0q_2, \phi, \phi] =$$
$$= [p_0(q_0 + q_1 + q_2) + p_1(q_0 + q_1 + q_2) + p_2(q_0 + q_1 + q_2), \phi, \phi] = [\mathrm{U}, \phi, \phi].$$

W_5. $\mathrm{T}p \equiv [\phi, \mathrm{U}, \phi]$ y $\mathrm{NT}p \equiv [\phi, \mathrm{U}, \phi]$ y por consiguiente $\mathrm{CT}p\mathrm{NT}p \equiv [\mathrm{U}, \phi, \phi]$.

W_6. Aquí la prueba es exactamente igual a la ya presentada.

Es obvio que si la fórmula $\mathrm{F}(p, q, \ldots, r) \equiv [\mathrm{U}, \phi, \phi]$, entonces una sustitución de las variables proposicionales $p, q, \ldots, r$ darán lugar a la misma partición $[\mathrm{U}, \phi, \phi]$.

Si $\mathrm{P} \equiv [\mathrm{U}, \phi, \phi]$ y $\mathrm{CPQ} \equiv [\mathrm{U}, \phi, \phi]$ de tal modo que

$$\mathrm{CPQ} \equiv [\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0 + \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_0 + \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 + \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_0\mathrm{Q}_1 + \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2, \mathrm{P}_0\mathrm{Q}_2] =$$
$$= [\mathrm{UQ}_0, \mathrm{UQ}_1, \mathrm{UQ}_2] = [\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2] = [\mathrm{U}, \varnothing, \varnothing],$$

entonces claramente cualquier fórmula proveniente de los axiomas por *modus ponens* estará asociada con $[\mathrm{U}, \varnothing, \varnothing]$.

Esto es, cualquier teorema de la axiomatización W_1-W_6 está asociada con $[\mathrm{U}, \varnothing, \varnothing]$. Puesto que el sistema está completo débilmente, entonces toda tautología del cálculo está también similarmente representada. El completamiento funcionalmente implica que los mismos resultados se aplican a cualquier formulación de cálculo proposicional con tres valores.

En vista del fuerte completamiento del sistema, ningunas otras fórmulas, a excepción de las tautologías, están representadas por [U, $\emptyset$, $\emptyset$].

BIBLIOGRAFIA

[1] Post, Emil L.: «Introduction to a general theory of elementary propositions», *American Journal of Mathematics*, 43 (1921), 163-185.

[2] Rose, Alan: «A lattice-theoretic characterization of 3-valued logic», *Journal of the London Mathematical Society*, 25 (1950), 255-259.

[3] Slupecki, Jerzy: «Der volle dreiwertige Aussagenkalkul», *Comptes Rendus de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie*, 29 (1936), 9-11.

[4] Wajsberg, M.: «Aksjomatyzacja trojwartosciowego rachunku zdan», *Comptes Rendus de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie*, 24 (1931), 126-148.

Departamento de Matemática
Universidad de Hawaii y Ateneo de Manila