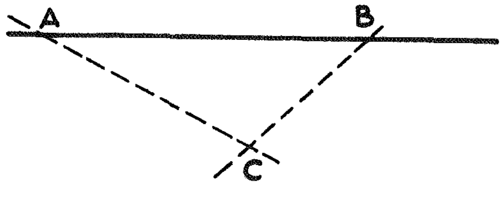
DILATACIONES

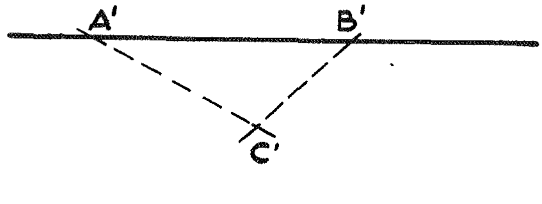
Por J. A. MARTÍN RIOJA

Esta breve nota constituye una introducción a la teoría de las transformaciones geométricas lineales del plano. La conveniencia de agrupar en una sola denominación las homotecias y las traslaciones es evidente, pues facilita el poner de manifiesto su estructura de grupo. Siguiendo a Artín, las llamamos dilataciones.

Definición: Llamaremos dilatación a una transformación que a cada par de puntos distintos, A y B, haga corresponder un par de puntos distintos, A′ y B′, situados en una recta paralela a la determinada por A y B.

Proposición: Una dilatación queda determinada por el conocimiento de un par de puntos y sus respectivas imágenes. En efecto, la imagen de cualquier punto C no alineado con A y B, de homólogos A′ y B′, vendrá dada por la intersección de las paralelas a AC y BC respectivamente por A′ y B′. Si C está alineado con A y B la construcción anterior no es posible, pero basta hallar la imagen de cualquier punto D no alineado con A y C y proceder con C respecto de A y D como en el caso anterior.





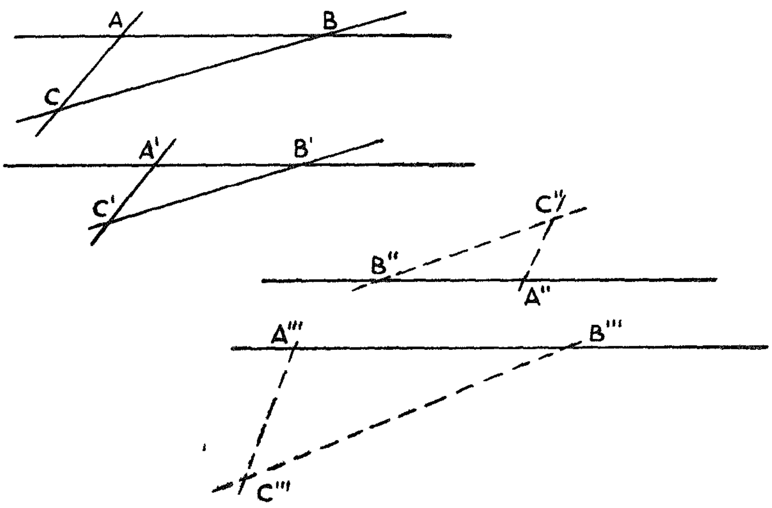
Definición: Llamaremos producto $d_2\, d_1$ de dos dilataciones d_1 y d_2 a la aplicación sucesiva de d_1 y d_2 a los puntos del plano.

Con esta ley de composición el conjunto de las dilataciones adquiere estructura de grupo. En efecto:

El producto de dos dilataciones d_1 y d_2 es una dilatación, ya que si A y B son puntos distintos cualesquiera del plano $A' = d_1\,(A) \neq d_1\,(B) = B'$ y $d_1(A)\; d_1(B)$ es una recta paralela a AB y $A'' = d_2[d_1(A)] \neq$ $\neq d_2[d_1(B)] = B''$ y las rectas A'B' y A''B'' son paralelas, luego AB es paralela a A''B''.

El producto es asociativo ya que

$$\gamma(\beta\alpha)\,(c) = \gamma[(\beta\alpha)\,(c)] = \gamma[\beta(\alpha(c)] = (\gamma\beta)\,[\alpha(c)] = (\gamma\beta)\alpha(c)$$



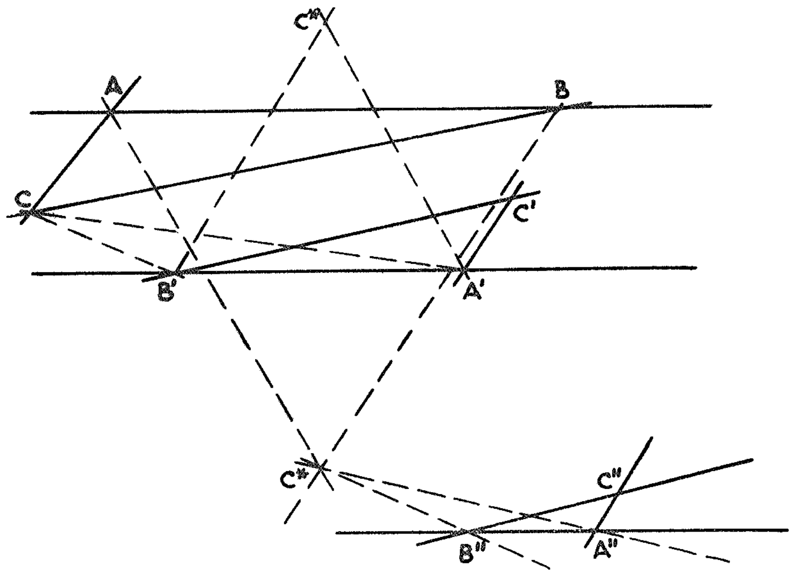
La identidad transforma puntos distintos en puntos distintos y las rectas AB y A'B', por ser $A' = A$ y $B' = B$, son paralelas, es decir, que la transformación identidad es una dilatación, y evidentemente es neutra respecto al producto de dilataciones.

El problema de construir C conociendo A, B, A', B' y C' se resuelve trazando paralelas por A y B a A'C' y B'C', dando solución única C y correspondiendo a una dilatación, la inversa de la que transforma C en C':

El grupo de las dilataciones no es abeliano. Basta considerar el ejemplo:

$$d_1(C) = C' \qquad d_2(C') = C'' \qquad d_2(C) = C^* \qquad d_1(C^*) = C^{**} \neq C''$$

Definición: Llamaremos punto doble en una dilatación al que coincida con su imagen. La identidad es una dilatación que tiene todos sus puntos dobles.



Si la dilatación d tiene un punto doble, A y B′ es el homólogo de B, la imagen de cualquier C se obtiene con sólo trazar la paralela por B′ a BC e intersecar por AC. Si la dilatación d tiene dos puntos dobles A y B, la imagen de un C cualquiera debe hallarse en AC y en BC, es decir, C también es doble, luego d es la identidad.

Definición: Llamamos traza a una recta cuyos puntos se transforman en puntos de ella misma. Evidentemente la recta que une un punto y su imagen es una traza.

Si dos trazas t y s se cortan en un punto 0, éste es doble y todas las demás trazas pasan por él, ya que en caso contrario al cortar a t y s determinarían nuevos puntos dobles y la dilatación se reduciría a la identidad.

De aquí resulta inmediato el «teorema restringido de Desargues»: «Si dos triángulos tienen los lados paralelos, los vértices homólogos determinan rectas concurrentes.»

Si dos trazas t y s son paralelas, todas las demás trazas son paralelas a ellas ya que si la traza r cortase a t y s determinaría dos puntos dobles y la dilatación sería la identidad.

Podemos, pues, clasificar las dilataciones según tengan las trazas concurrentes, es decir, con un punto doble, «homotecias», o bien de trazas paralelas, es decir, sin punto doble, «traslaciones».

Seminario Didáctico de Matemáticas
Instituto «Milá y Fontanals»