NOTA SOBRE MANIPULACION DE MATRICES BOOLEANAS

Por

A. F. T.

I. Como se sabe, el Algebra de Boole fue creada con la intención de dar forma algébrica a los procesos que realiza nuestra mente para la elaboración de sus razonamientos, a partir de ideas elementales enunciadas, por proposiciones simples.

Pasado el tiempo, el Algebra de Boole quedó encajada dentro de la sistemática de la llamada Algebra Moderna.

Por otra parte, el Algebra de Boole ha prestado gran utilidad en aplicaciones a la Estadística, Economía, etc., y muy especialmente a la Teoría de los Sistemas Automáticos Secuenciales y a la Teoría de los Grafos.

En la resolución de cuestiones planteadas por estas teorías, y en la lectura de obras especializadas, es frecuente tener que realizar o seguir cálculos con matrices booleanas, es decir, matrices cuyos elementos se representan por los símbolos 0 y 1.

Entre estos elementos, que no deben confundirse con los números de la Aritmética usual, se definen la suma y el producto del siguiente modo:

$$0 + 0 = 0 \qquad 0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$$
$$1 \cdot 1 = 1 \qquad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Las operaciones con más de dos sumandos o factores, se definen por reiteración a partir de las anteriores. Es de interés resaltar que el resultado de la suma es «uno» cuando alguno de los sumandos es «uno». Así,

$$0 + 0 + 0 = 0 \qquad 1 + 0 + 0 = 1 \qquad 1 + 0 + 0 + 1 = 1$$

Evidentemente, estas operaciones poseen las leyes asociativa, conmutativa y distributiva (1).

(1) Además de la ley distributiva ordinaria $a(b + c) = ab + ac$, cumplen también la dual $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

Entre las matrices booleanas se definen, con la misma rutina formal del Algebra usual, la matriz transpuesta de otra, y la suma y multiplicación de matrices de órdenes adecuados.

En esta breve nota de carácter práctico, presentamos las ventajas en cuanto a rapidez y seguridad del cálculo booleano, cuando se realiza con el auxilio de un papel transparente, disponiendo los elementos de la matriz en un rectángulo de celdillas cuadradas (2).

II. *Suma.*—La suma indicada en la figura 1 se obtiene muy fácilmente escribiendo el segundo sumando en papel transparente, y superponiéndolo, un poco desplazado, sobre el primero, tal como indica el segundo miembro de la figura 1. Esto permite escribir con seguridad y rapidez el resultado.

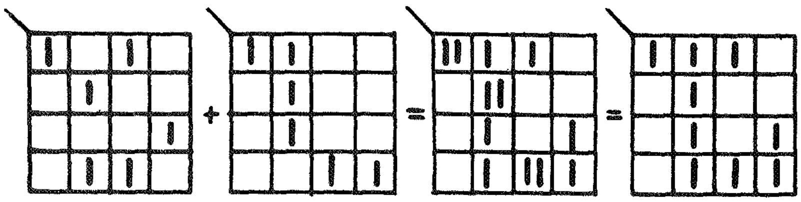

Figura 1.

Para mayor claridad se han omitido los «ceros» de las matrices. En este sencillo ejemplo, se hubiera obtenido muy cómodamente el resultado por el método ordinario, pero la ventaja se presenta cuando las matrices son de órdenes elevados, o las sumas tienen varios sumandos.

III. *Matriz transpuesta.*—Si una matriz booleana se halla escrita, del modo indicado, en un papel transparente, al invertir el papel, realizando una simetría respecto de la bisectriz del vértice principal, se obtiene la matriz transpuesta. En ésta, los «unos» se presentan horizontalmente, lo cual, en lugar de ser inconveniente, facilita las operaciones. De este modo se ha obtenido la matriz A′ (fig. 3) transpuesta de la A (fig. 2).

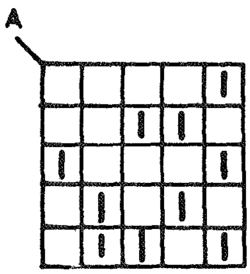

Fig. 2.

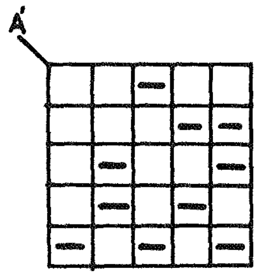

Fig. 3.

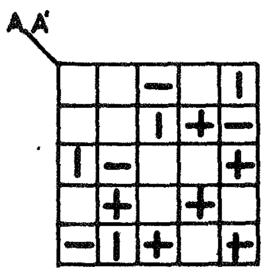

Fig. 4.

(2) El que tenga necesidad de utilizar este cálculo puede proveerse de una falsilla de red cuadrada que le permitirá situar correctamente los elementos, incluso sin dibujar la red.

Al superponer A′ con A aparecen «cruces» en las celdas de elementos conjugados iguales a «uno», cuya investigación es de gran importancia práctica en las aplicaciones, donde suelen presentarse matrices de orden mucho más elevado que en el ejemplo anterior, de intención breve a efectos de claridad. (Fig. 4.)

IV. *Multiplicación.*—Como el elemento de a_{hk} del producto de dos matrices, resulta de multiplicar la fila h del multiplicando por la fila k de la matriz transpuesta del multiplicador, superponiendo éstas puede leerse por transparencia el elemento a_{hk} del producto.

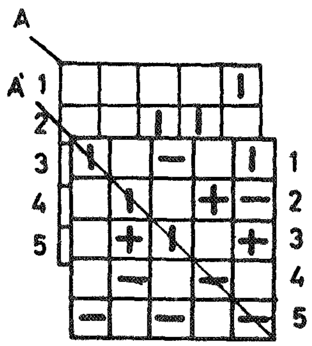

Figura 5.

Así, para multiplicar por sí misma la matriz A de la figura 2, debe superponerse el multiplicando A sobre la matriz A′ transpuesta del multiplicador. En la figura 5 se presenta una posición intermedia de la operación. La bisectriz dibujada (por ello conviene representarla en el multiplicador) atraviesa las casillas de posiciones teóricas a_{31}, a_{42}, a_{53}, en la zona de superposición. En la banda 3-1 no hay ninguna cruz, pero sí hay en las bandas 4-2, 5-3. Como consecuencia de esto, por simple lectura de estas bandas se tienen los siguientes elementos del producto:

$$a_{31} = 0 \qquad a_{42} = 1 \qquad a_{53} = 1$$

Análogamente, deslizando hacia arriba el multiplicando, una nueva lectura proporciona

$$a_{41} = 0 \qquad a_{52} = 1$$

Un barrido completo del multiplicando sobre la transpuesta del multiplicador permite obtener cómoda y seguramente productos de matrices booleanas.

Los ejemplos tratados en esta nota se han referido a matrices cuadradas, pero es manifiesto que ello no es exigencia del método, y puede igualmente utilizarse con matrices rectangulares.

Este mismo uso del papel transparente puede servir para facilitar productos de matrices ordinarias no booleanas, y claro está que en este caso la transpuesta del multiplicador debe escribirse y no puede obtenerse por simetría (inversión del papel).