POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO

Por

GONZALO CALERO ROSILLO

Llamamos N al conjunto de los números naturales, Q al de los racionales, + Q al de los racionales positivos. Al conjunto + Q con sus estructuras aditiva y multiplicativa le llamamos semicuerpo de los racionales positivos.

Suponemos conocidas la definición de potencia de exponente natural, sus propiedades y la definición de raíz.

Esta nota estudia la potencia de exponentes fraccionario y racional positivos sucesivamente en N, + Q y Q.

Potencias de exponente fraccionario en N.—Def. 1. Dado $[m, n] \in \in \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ definamos la correspondencia

$$[m,n] : \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}$$

así, para $x, y \in \mathrm{N}$,

$$[m, n] : x \longrightarrow y \Longleftrightarrow x^m = y^n$$

Según la definición de raíz será:

$$x^m = y^n \Longleftrightarrow x = \sqrt[m]{y^n} \Longleftrightarrow y = \sqrt[n]{x^m}$$

es decir, que

$$y = [m, n](x) \Longleftrightarrow y = \sqrt[n]{x^m}$$

con lo que la correspondencia $[m, n]$ es equivalente a «elevar a m y extraer la raíz n-esima».

En lugar de escribir $y = [m, n]$ escribiremos en lo sucesivo

$$y = x^{[m,\ n]} \tag{1}$$

Original e imagen de $[m, n]$.—Supongamos que $[m, n] : x \longrightarrow y$, y sean

$$x = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots . a_h^{\alpha_h} \qquad\qquad y = b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \ldots . b_k^{\beta_k}$$

las descomposiciones de x e y en factores primos.

De la igualdad $x^m = y^n$ se deduce

$$\prod_{i=1}^{h} a_i^{\alpha_i m} = \prod_{i=1}^{k} b_i^{\beta_i n} \tag{2}$$

y al ser *única la descomposición de factores en* N resultan:

$$a_i = b_i \qquad \alpha_i m = \beta_i n \text{ para } i = 1, 2, \ldots . h \,; \qquad h = k$$

Si m.c.d. $(m, n) = d$ y $m' = \dfrac{m}{d}$ $n' = \dfrac{n}{d}$

se obtiene

$$\alpha_i m' = \beta_i n'$$

de donde el ser m' y n' primos entre sí, por el teorema de Euclides

$$\alpha_i = n' h_i \qquad \beta_i = m' h_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots . h \tag{3}$$

y llamando (m') al conjunto de múltiplos de m y análogamente (n') al de los de n, las igualdades anteriores se pueden escribir:

$$\alpha_i \varepsilon (n') \qquad \beta_i \varepsilon (m')$$

Teniendo en cuenta las (3) la igualdad (2) toma la forma

$$\left(a^{n'}\right)^m = \left(a^{m'}\right)^n \tag{4}$$

habiendo hecho previamente

$$\prod_{i=1}^{h} a_i^{h_i} = a$$

Def. 2.—Sea S_p el subconjunto de N definido así:

$$x \varepsilon S_p \Longleftrightarrow x = \Pi a_i^{\alpha_i}$$

siendo a_i números primos en número finito y $\alpha_i \varepsilon (p)$.

Proposición 1.—La correspondencia $[m, n]$ con $m \pm 0$ y $n \pm 0$ es un isomorfismo (en el producto) de S_n' sobre S_m'.

Demostración.—Si m y n son diferentes de cero, la igualdad (4) y la Def. 2 nos dicen que $[m, n]$ es una correspondencia biunívoca de S_n, sobre S_m', ya que para todo $a^{n'} \varepsilon S_n'$ existe en homólogo único $a^{m'} \in S_m'$ y recíprocamente.

La biyección $[m. n]$ conserva la estructura de producto.

En efecto, si x, $z \varepsilon S_n'$ tienen como correspondientes y, $t \varepsilon S_m'$ respectivamente.

$$\begin{aligned} x \xrightarrow{[m,\, n]} y &\Longleftrightarrow x^m = y^n \\ z \longrightarrow t &\Longleftrightarrow z^m = t^n \end{aligned} \tag{5}$$

multiplicando las dos últimas igualdades de la derecha,

$$x^m z^m = y^n \cdot t^n \Rightarrow (x \cdot z)^m = (yt)^n \Leftrightarrow x \cdot z \xrightarrow{[m,\, n]} yt$$

El isomorfismo $[m, n]$ conserva también los cocientes cuando existen.

Pues si existen los cocientes $\frac{x}{z}$ e $\frac{y}{t}$ dividiendo las igualdades de la derecha de (5) queda:

$$\frac{x^m}{z^m} = \frac{y^n}{t^n} \Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right)^m = \left(\frac{y}{t}\right)^n \Leftrightarrow \frac{x}{z} \xrightarrow{[m,\, n]} \frac{y}{t}$$

Casos particulares.—1.º Si $[m, n]$ es de la forma $[0, n]$ con $n \neq 0$ de

$$x \xrightarrow{[o,\, n]} y \Rightarrow x^o = y^n \Rightarrow 1 = y^n \Rightarrow y = 1$$

con lo que $[0, n]$ es una aplicación de N en 1.

2.º Si $[m, n]$ es de la forma $[m, o]$,

$$x \xrightarrow{[m,\, o]} y \Leftrightarrow x^m = y^o = 1 \Rightarrow x = 1$$

y $[m, 0]$ es una correspondencia de 1 sobre N.

3.º El isomorfismo $[m, 1]$ es la potencia m-ésima:

$$x \xrightarrow{[m,\, 1]} y \Leftrightarrow x^m = y \quad \text{con} \quad x \varepsilon S_1 = N \quad \text{e} \quad y \varepsilon S_m$$

4.º El isomorfismo $[1, n]$ es la raíz n-ésima:

$$x \xrightarrow{[1,\, n]} y \Leftrightarrow x = y^n \Leftrightarrow y = \sqrt[n]{x} \quad \text{con} \quad x \varepsilon S_n \quad \text{e} \quad y \varepsilon S_1 = N$$

Proposición 2.—Los subconjuntos S_p definidos en Def. 2 son subsemigrupos multiplicativos de N.

Dados S_p y S_q se verifica que $S_p \cap S_q = S_{p' \cdot q'}$

Demostración.—De las (5) se deduce fácilmente que si x, y εS_p se verifica que $x \cdot y \in S_p$. La asociatividad y conmutatividad en S_p son consecuencia de las mismas propiedades en N. El $1 \varepsilon S_p$ ya que $1^p = 1$.

Si $x \varepsilon S_p \cap S_q \Rightarrow x = a^{\alpha p} = a^{\beta q} \Rightarrow \alpha p = \beta q \Rightarrow \alpha = kq', \beta = kp'$, con lo que

$$x = a^{kp'q} = a^{kpq'}$$

Recíprocamente, si

$$x = \left(a^{kp'}\right)^q = \left(a^{kq'}\right)^p \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x \varepsilon S_p \\ x \varepsilon S_q \end{Bmatrix} \Rightarrow x \varepsilon S_p \cap S_q$$

Producto en $\{[m, n]\}$.—Consideremos el conjunto de isomorfismos $\{[m, n]\}$. Dados los isomorfismos $[m, n]$ y $[p, q]$ del conjunto anterior, vamos a estudiar la posibilidad de aplicarlos sucesivamente:

Sean x, y, z tales que

$$x \xrightarrow{[m,\, n]} y \xrightarrow{[p,\, q]} z$$

Lo anterior equivale a decir que

$$x^m = y^n \quad \text{e} \quad y^p = z^q$$

de donde decucimos

$$x^{mp} = z^{nq} \Longleftrightarrow x \xrightarrow{[mp,\, nq]} y$$

lo cual nos da el isomorfismo producto

$$[p, q]\ [m, n] = [mp, nq] \tag{6}$$

El isomorfismo producto $[mp, nq]$ es un isomorfismo de $S_{(nq)'}$, sobre $S_{(mp)'}$, ya que $x \varepsilon S_{(nq)'}$ e $y \varepsilon S_{(mp)'}$ siendo

$$(mp)' = \frac{mp}{D}, \; (nq)' = \frac{nq}{D}, \; D = \text{m.c.d. } [mp, nq]$$

Proposición 3.—El producto definido en (6) es asociativo, conmutativo, tiene elemento neutro y todo elemento $[m, n]$ tiene inverso.

Demostración.—La asociatividad es consecuencia de sei asociativo el producto de isomorfismos. La conmutatividad se deduce fácilmente de (6). El elemento neutro es el $[1, 1]$ y un inverso del $[m, n]$ es el $[n, m]$, ya que

$$x^m = y^n \quad \text{e } y^n = z^m \Longleftrightarrow x^m = z^m \Longrightarrow x = z$$

luego $[n, m]\ [m, n]$ hace corresponder a cada elemento de S_n' el mismo elemento.

Utilizando la notación de raíz la correspondencia entre x, y, z dada por

$$x \xrightarrow{[m,\, n]} y \xrightarrow{[p,\, q]} z$$

se puede escribir así:

$$y = \sqrt[n]{x^m} \qquad z = \sqrt[q]{y^p} \quad \Longrightarrow \quad z = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^q}$$

y las propiedades anteriores se traducen con esta nomenclatura así:

$$\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^p} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^m} = \sqrt[nq]{x^{pm}} \tag{7}$$

Casos particulares. 1.º *Raíz de una potencia y potencia de una raíz.*— Si aplicamos sucesivamente $[m, 1]$ y $[1, q]$ y son x, y, z elementos correspondientes,

$$x \xrightarrow{[m,1]} y \xrightarrow{[1,q]} z$$

$$x^m = y \quad z = \sqrt[q]{y} \longrightarrow z = \sqrt[q]{x^m}$$

por la conmutabilidad

$$x \xrightarrow{[1,q]} y_1 \xrightarrow{[m,1]} z$$

$$x = y_1{}^q \quad y_1{}^m = z \Rightarrow z = \left(\sqrt[q]{x}\right)^m$$

de las dos resulta

$$\left(\sqrt[q]{x}\right)^m = \sqrt[q]{x^m} \tag{8}$$

teniendo en cuenta (8) las igualdades (7) se pueden escribir así:

$$\sqrt[q]{\sqrt[n]{(x^m)^p}} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{(x^p)^m}} = \sqrt[nq]{x^{pm}}$$

2.º *Raíz de una raíz.*—Considerando el producto particular $[1, n]$ $[1, q]$ se obtiene:

$$\sqrt[n]{\sqrt[q]{x}} = \sqrt[nq]{x} = \sqrt[q]{\sqrt[q]{x}}$$

3.º El producto $[m, n]$ se puede descomponer así:

$$[m, n] = [m, 1] \cdot [1, n]$$

Dados dos elementos homólogos

$$x \xrightarrow{[m,n]} z$$

podemos encontrar *un* y tal que

$$x \xrightarrow{[m,1]} y \xrightarrow{[1,n]} z \qquad y = z^n$$

con lo que

$$x \xrightarrow{[m,1]} z^n$$

De análoga manera,

$$x^m \xrightarrow{[1,n]} z$$

Producto de radicales. Producto de potencias de la misma base. — Si x e y son homólogos por $[m, n]$, también lo son por $[mq, nq]$, siendo q cualquier número natural:

$$x \xrightarrow{[m,\, n]} y \Longleftrightarrow x^m = y^n \Longleftrightarrow x^{mq} = y^{nq} \cdot \Longleftrightarrow x \xrightarrow{[mq,\, nq]} y$$

Sean x, y elementos correspondientes por $[m, n]$ y z, t elementos correspondientes por $[p, q]$:

$$\left.\begin{array}{l} x \xrightarrow{[m,\, n]} y \Longrightarrow x \xrightarrow{[mq,\, nq]} y \Longleftrightarrow x^{mq} = y^{nq} \\ z \xrightarrow{[p,\, q]} t \Longrightarrow z \xrightarrow{[pn,\, qn]} t \Longleftrightarrow z^{pn} = t^{qn} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x^{mq}\, z^{pn} = (y \cdot t)^{nq} \quad (9)$$

utilizando la notación de raíz, lo anterior se puede escribir así:

$$\sqrt[nq]{x^{mq} \cdot z^{pn}} = y \cdot t$$

y como

$$y = \sqrt[n]{x^m} \qquad t = \sqrt[q]{z^p}$$

resulta:

$$\sqrt[nq]{x^{mq} \cdot z^{pn}} = \sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[q]{z^p}$$

En el caso particular en que $x = z$, de (9) se deduce

$$x^{mq} \cdot x^{np} = (y \cdot t)^{nq}$$

o bien

$$x^{mq+np} = (y \cdot t)^{nq} \Longleftrightarrow x \xrightarrow{[mq\, +\, up,\, nq]} y \cdot t \qquad (10)$$

la relación (10) nos permite escribir

$$y \cdot t = [mq + np, nq]\, x$$

o bien, según el convenio adoptado en (1),

$$y \cdot t = x^{[mq+np,\, nq]}$$

y teniendo en cuenta los valores de y, t:

$$x^{[m,\, n]} \cdot x^{[p,\, q]} = x^{[mq+np,\, nq]} \qquad (11)$$

El resultado anterior nos permite definir una adición en el conjunto $\{[m, n]\}$.

Def. 3. Dados $[m, n]$, $[q, p]$, llamamos suma y la representamos por $[m, n] + [p, q]$ a la correspondencia, que actúa así:

$$([m, n] + [p, q])\, x = x^{[m,\, n]} \cdot x^{[p,\, q]} \qquad (12)$$

Según (11) la suma de dos isomorfismos de $\{[m, n]\}$ pertenece al conjunto y es:

$$[m, n] + [p, q] = [mq + np, nq] \qquad (13)$$

Con ello la igualdad (12) se puede escribir

$$x^{[m,\, n]+[p,\, q]} = x^{[m,n]} \cdot x^{[p,q]}$$

El producto de potencias de la misma base es otra potencia que tiene por base la misma, y por exponente, la suma de los exponentes

La Def. 3 nos da la siguiente relación entre los subsemigrupos de N:

$$\left.\begin{array}{l} S_{n}' \xrightarrow{[m,\, n]} S_{m}' \\[2ex] S_{q}' \xrightarrow{[p.\, q]} S_{p}' \end{array}\right\} \Longleftrightarrow S_{(nq)}' \xrightarrow{[m, n]\, +\, [p.\, q]} S_{(mq+np)}'$$

Cociente de radicales. Cociente de potencias de la misma base.—Procediendo de manera análoga a la seguida en el punto anterior, sean x, y elementos correspondientes en $[m,\ n]$ y z, t en $[p,\ q]$. Supongamos, además, que existen $\dfrac{x}{z}$ e $\dfrac{y}{t}$:

$$\left.\begin{array}{l} x \xrightarrow{[m,\, n]} y \Longleftrightarrow x^{m} = y^{n} \Longrightarrow x^{mq} = y^{nq} \\[2ex] z \xrightarrow{[p,\, q]} t \Longrightarrow z^{p} = t^{q} \Longrightarrow z^{np} = t^{nq} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x^{mq}}{z^{np}} = \left(\frac{y}{t}\right)^{nq} \tag{14}$$

utilizando la notación de raíz

$$\sqrt[nq]{\frac{x^{mq}}{z^{np}}} = \frac{y}{t} \Longrightarrow \sqrt[nq]{\frac{x^{mq}}{z^{np}}} = \frac{\sqrt[n]{x^{m}}}{\sqrt[q]{z^{p}}}$$

En el caso particular en que $x = z$ (14) se puede escribir:

$$\frac{x^{mq}}{x^{np}} = \left(\frac{y}{t}\right)^{nq} \Longrightarrow x^{mq-np} = \left(\frac{y}{t}\right)^{nq}$$

$$x \xrightarrow{[mq\, -\, np,\ nq]} \frac{y}{t} \tag{15}$$

Def. 4.—Al isomorfismo $[mq - np,\ nq]$ le llamamos diferencia de los isoforfismos $[m,\ n]$ y $[p,\ q]$.

$$[m,\, n] - [p,\, q] = [mq - np,\, nq] \tag{16}$$

De (15) y de (16)

$$\frac{y}{t} = x^{[mq-np,\ nq]} = x^{[m,\ n]-[p,\ q]}$$

o bien,

$$\frac{x^{[m,\ n]}}{x^{[p,\ q]}} = x^{[m,\ n]-[p,\ q]}$$

Igualdad que nos da el cociente de potencias de la misma base.

Evidentemente no siempre está definida la diferencia $[m, n]-[p, q]$ con bases pertenecientes a N.

Las Def. 3 y 4 nos conducen a la

Proposición 4.—El conjunto $\{[m, n]\}$ es un semigrupo aditivo con diferencia.

Las propiedades asociativa y conmutativa de la adición en $\{[m, n]\}$ son consecuencia de (12). Si consideramos la correspondencia $[0, n]$ como perteneciente al conjunto $\{[m, n]\}$ esta correspondencia es el elemento neutro de la adición.

Proposición 5.—Si consideramos las fracciones (m, n) con $n \pm 0$, el conjunto de ellas $\{(m, n)\}$, con sus estructuras aditiva y multiplicativa, es isomorfo al conjunto de isomorfismos $\{[m, n]\}$.

La demostración es consecuencia de (6) y de (13).

Este isomorfismo nos permite definir la potencia de exponente fraccionario.

Def. 5.—Dado $x \varepsilon \mathrm{N}$ y la fracción (m, n) definimos como potencia de base x y exponente (m, n) y se representa por $x^{(m,\, n)}$ a la imagen $x^{[m,\, n]}$ de x por la correspondencia $[m, n]$.

Según Def. 1,

$$y = x^{(m,\, n)} = x^{[m,\, n]} \Longleftrightarrow y^n = x^m \Longleftrightarrow y = \sqrt[n]{x^m}$$

Evidentemente, para que exista la potencia y ha de ser $x \varepsilon \mathrm{S}_n'$, en cuyo caso $y \varepsilon \mathrm{S}_m'$.

Relación de igualdad en $\{[m, n]\}$.—Def. 6.—Diremos que los isomorfismos $[p, q]$ y $[r, s]$ son iguales si y solamente si $x^{[p,\, q]} = x^{[r,\, s]}$ para todo $x \varepsilon \mathrm{S}_q' \cap \mathrm{S}_s'$.

Se comprueba que la Def. 6 cumple las condiciones requeridas por todo criterio de igualdad. Llamemos R a la relación de igualdad anterior.

1. *Propiedad reflexiva:*

$$[p, q] \mathrm{R} [p, q] \Longleftrightarrow x^{[p,q]} = x^{[p,q]} \text{ para todo } x \varepsilon \mathrm{S}q'.$$

2. *Propiedad simétrica:*

$$\text{Si } [p, q] \mathrm{R} [r, s] \Longrightarrow x^{[p,q]} = x^{[r,s]} \Longrightarrow x^{[r,s]} = x^{[p,q]} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow [r, s] \mathrm{R} [p, q]$$

3. *Propiedad transitiva:*

$$\text{Si } [p, q] \mathrm{R} [r, s] \text{ y } [r, s] \mathrm{R} [v, t] \Longrightarrow x^{[x,q]} = x^{[r,s]} \text{ y } x^{[r,s]} =$$
$$= x^{[v,t]} \Rightarrow x^{[p,q]} = x^{[v,t]} \Rightarrow [p, q] \mathrm{R} [v, t]$$

Proposición 6.—La definición de igualdad dada anteriormente coincide con la definición de igualdad de fracciones si consideramos (m, n) como una fracción ordinaria.

Llamamos R′ a la relación de igualdad de fracciones.

Si las fracciones (p, q) y (r, s) son iguales,

$$(p, q)\ R'\ (r, s) \Leftrightarrow ps = qr \Rightarrow x^{ps} = x^{qr} \Rightarrow x^p = \sqrt[s]{(x^r)^q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^p = (\sqrt[s]{x^r})^q \Rightarrow \sqrt[q]{x^p} = \sqrt[s]{x^r} \Leftrightarrow x^{[p,\, q]} = x^{[r,\, s]} \Leftrightarrow [p, q]\ R\ [r, s]$$

Recíprocamente, si

$$[p, q]\ R\ [r, s] \Leftrightarrow x^{[p,\, q]} = x^{[r,\, s]}$$

haciendo $\quad y = x^{[p,\, q]} \qquad y^q = x^p$

$$y^s = x^r \Rightarrow x^{ps} = x^{rq} \Rightarrow ps = rq \Leftrightarrow (p, q)\ R'\ (r, s)$$

Corolario 1.—La correspondencia $i : \{[m, n]\} \longrightarrow \{(m, n)\}$ tal que $(m, n) = i\,([m, n])$, hace corresponder a isomorfismos iguales, fracciones iguales.

Es otra forma de anunciar la proposición 6.

Sean $\{[m, n]\}/R$ y $[(m, n)]/R'$ los conjuntos cocientes respectivos según las relaciones de igualdad anteriores. Se verifica

Corolario 2.—La correspondencia I: $\{[m, n]\}/R \longrightarrow \{(m, n)\}/R'$ subordinada por i en los conjuntos cocientes es una correspondencia biunívoca.

Como $[(m, n)]/R$ es el conjunto de los racionales positivos $+\,Q$, el corolario 2 quiere decir que cada clase de isomorfismos $[m, n]$ está en correspondencia biunívoca con un número racional positivo.

Corolario 3.—Si $(m, n)\ R\ (p, q)$ se verifica que $x^{(m,n)} = x^{(p,q)}$.

Por def. 5:

$$x^{(m,\, n)} = x^{[m,\, n]} \qquad x^{(p,\, q)} = x^{[p,\, q]}$$

pero si

$$(m, n) = (p, q) \Rightarrow [m, n] = [p, q] \Rightarrow x^{[m,n]} = x^{[p,q]} \Rightarrow x^{(m,n)} = x^{(p,q)}$$

Lo anterior también se puede escribir:

Si $(m, n) = (p, q) \Rightarrow \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[q]{x^p}$.

Como caso particular, $(m, n) = (hm, hn) \Rightarrow \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[hn]{x^{hm}}$.

El Corolario 3 nos permite definir la potencia de exponente racional positivo.

Def. 6. — Dado el número racional positivo $\dfrac{m}{n}$ diremos que $x^{\frac{m}{n}} = x^{(m,\, n)}$, siendo (m, n) una fracción representante de $\dfrac{m}{n}$.

El corolario 3 demuestra que la definición anterior no depende de la fracción elegida.

La potencia $x^{\frac{m}{n}}$ existe para todo $x \in S_{n'}$, siendo n' el mínimo denominador de la clase $\dfrac{m}{n}$. Es una consecuencia de la proposición 1.

La adición y multiplicación definidas en $\{[m, n]\}$ por Def. 3 y (6) respectivamente, nos permiten definir una adición y una multiplicación en $[m, n]/R$ de la manera habitual.

Llamamos $[\mathbf{m}, \mathbf{n}]$ a la clase a que pertenece $[m, n]$ y $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ a la clase a que pertenece $[p, q]$.

Def. 7.—Si $[m, n]$ y $[p, q]$ son representantes respectivos de $[\mathbf{m}, \mathbf{n}]$ y $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$, llamamos suma de estas clases y la representaremos por $[\mathbf{m}, \mathbf{n}] + [\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ a la clase a la que pertenece $[m, n] + [p, q]$. De análoga manera, definimos el producto $[\mathbf{m}, \mathbf{n}] \times [\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ como la clase a que pertenece $[m, n] \times [p, q]$.

La anterior definición la podemos expresar así:

$$\left.\begin{array}{l}[m, n] \in [\mathbf{m}, \mathbf{n}] \\ [p, q] \in [\mathbf{p}, \mathbf{q}]\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}[m, n] + [p, q] \in [\mathbf{m}, \mathbf{n}] + [\mathbf{p}, \mathbf{q}] \\ [m, n] \times [p, q] \in [\mathbf{m}, \mathbf{n}] \times [\mathbf{p}, \mathbf{q}]\end{array}\right.$$

Las operaciones anteriores son uniformes, ya que el criterio de igualdad R es equivalente al de las fracciones y además las operaciones definidas $\{[m, n]\}$ son isomorfas a las definidas en las fracciones $\{(m, n)\}$ según Prop. 5 y (6).

La conmutatividad y asociatividad en $\{[\mathbf{m}, \mathbf{n}]\}$ son consecuencia de las propiedades análogas en $\{[m, n]\}$, Prop. (3) y Prop. (4).

Veamos que la multiplicación es distributiva con respecto a la adición.

$$\begin{aligned}([m, n] + [p, q]) \cdot [r, s] &= [mq + np, nq] \cdot [r, s] = \\ &= [mqr + npr, nqs] = [mqrs + nprs, nqss] = \\ &= [mr, ns] + [pr, qs] = [m, n]\,[r, s] + [p, q]\,[r, s]\end{aligned}$$

Las igualdades anteriores son consecuencia de las definiciones de adición y multiplicación en $\{[m, n]\}$ y del criterio de igualdad R., y nos demuestran que las clases siguientes son la misma:

$$([\mathbf{m}, \mathbf{n}] + [\mathbf{p}, \mathbf{q}])\,[\mathbf{r}, \mathbf{s}] \equiv [\mathbf{m}, \mathbf{n}]\,[\mathbf{r}, \mathbf{s}] + [\mathbf{p}, \mathbf{q}]\,[\mathbf{r}, \mathbf{s}]$$

De todo lo anterior resulta:

Proposición 7.—La biyección I: $\{[m, n]\}/R \longleftrightarrow \{(m, n)\}/R'$ es un isomorfismo de semicuerpos.

Se puede escribir también así:

$$I : \{[\mathbf{m}, \mathbf{n}]\} \longleftrightarrow +Q$$

Potencias en $+Q$. Subsemigrupos de cocientes.

Def. 8.—Definamos el conjunto $+Q_n$ así:

$$+Q_n = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in S_n, b \neq 0 \right\}$$

Evidentemente, $+Q_n \subset +Q$ para todo $n \in N$.

La correspondencia $\dfrac{m}{n}$ definida en N por Def. 6 podemos extenderla también a una correspondencia de $+$ Q en sí mismo de análoga manera a como lo hicimos allí.

Def. 9.—Dos elementos x, $y \varepsilon + Q$ se corresponden por $\dfrac{m}{n}$ si y solamente si $x^m = y^n$:

$$x \xrightarrow{\frac{m}{n}} y \Longleftrightarrow x^m = y^n$$

Como en el caso de N se demuestra que la Def. 9 no depende del par (m, n), sino de $\dfrac{m}{n}$.

Se verifica como en el caso mencionado la

Proposición 8.—Los conjuntos $(+ Q_j)_{j\varepsilon N}$ son subsemigrupos multiplicativos de $+$ Q. Los $\{+ Q_i - \{0\}\}_{i\varepsilon N}$ son grupos. La correspondencia $\dfrac{m}{n}$ con $m \pm 0$, $n \pm 0$ es un isomorfismo de $+ Q_{n'}$ sobre $+ Q_{m'}$.

El conjunto $\left\{\dfrac{m}{n}\right\}$, $n \pm 0$ es un semicuerpo isomorfo al $+$ Q.

Comenzaremos por el tercer punto. Sean x, y elementos correspondientes por $\dfrac{m}{n}$. Por ser x, $y \varepsilon + Q_n$ serán $x = \dfrac{a}{b}$ $y = \dfrac{c}{d}$ con $b \pm 0$ $d \pm 0$ y $a, b, c, d \varepsilon$ N. Sean, además, $a = \Pi a_i^{\alpha_i}$, $b = \Pi b^{\beta_i}$, $e = \Pi e^{\gamma_i}$, $d = \Pi d^{\delta_i}$ las descomposiciones en factores primos.

Si las fracciones son irreducibles, se obtienen sucesivamente:

$$x^m = y^n \Rightarrow \frac{a^m}{b^m} = \frac{c^n}{d^n} \Rightarrow a^m = c^n,\ b^m = c^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi a_i^{\alpha_i m} = \Pi e_i^{\gamma_i n},\ \Pi b_i^{\beta_i m} = \Pi d_i^{\delta_i n}$$

de donde

$$a_i = c_i,\ b_i = d_i,\ \alpha_i m = \gamma_i n,\ \beta_i m = \delta_i n$$

Supongamos que m.c.d. $(m, n) = h$ y $m' = \dfrac{m}{h}$ $n' = \dfrac{n}{h}$, con lo cual las dos últimas igualdades dan:

$$\alpha_i = n' k_i \ \gamma_i = m' k_i,\ \beta_i = n' r_i \ \delta_i = m' r_i$$

y, por tanto,

$$a, b \varepsilon S_{n'} \quad e, d \varepsilon S_{m'} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} \varepsilon + Q_{n'} \qquad \frac{e}{d} \varepsilon + Q_{m'}$$

$$\text{or.}\left(\frac{m}{n}\right) \subset Q_{n'} \qquad \text{im.}\left(\frac{m}{n}\right) \subset Q_{m'}$$

Sean x, y ; z, t elementos correspondientes por $\dfrac{m}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} x \xrightarrow{\frac{m}{n}} y \Longleftrightarrow x^m = y^n \\ z \longrightarrow t \Longleftrightarrow z^m = t^n \end{array}\right\} \Longrightarrow (xz^m = (yt)^n \Longleftrightarrow xz \xrightarrow{\frac{m}{n}} yt$$

Lo cual junto con lo anterior demuestra que si x, $z \varepsilon + Q_{n'}$, también $xy \varepsilon + Q_{n'}$, es decir, que los $(+ Q_j)_{j \varepsilon N}$ son subsemigrupos multiplicativos de $+ Q$, y además que $\dfrac{m}{n}$ es un homomorfismo de $+ Q_{n'}$ en $+ Q_{m'}$.

Sea $\dfrac{c}{d} \,\varepsilon\, + Q_{m'}$; por tanto, $\dfrac{c}{d} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{m'}$ y como

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n'}\right]^m = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{m'}\right]^n$$

resulta que $\dfrac{c}{d}$ tiene como único correspondiente por $\dfrac{m}{n}$ el $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n'} \varepsilon + Q_{n'}$ con lo que $\dfrac{m}{n}$ es un isomorfismo de $+Q_{n'}$ sobre $+Q_{m'}$.

Como la Def. 7 se puede extender a $+Q$, resulta que dado $\dfrac{m}{n}$ con $m \pm 0$ y $n \pm 0$ el $\dfrac{n}{m}$ es el inverso, lo cual demuestra la segunda parte. De la misma Def. 7, extendida a $+ Q$, resulta la cuarta parte de la proposición.

Extensión a Q del concepto de potencia de exponente fraccionario.— De análoga manera a la seguida en Def. 1 y Def. 9, podemos definir en Q la correspondencia $[m, n]$.

Def. 10.—Los números x e y pertenecientes a Q son correspondientes por $[m, n]$ si y solamente si se verifica $x^m = y^n$.

$$x \xrightarrow{[m,\, n]} y \Longleftrightarrow x^m = y^n \text{ para } x, y \varepsilon Q \text{ y } m, n \varepsilon N.$$

Como en los casos citados, lo anterior lo podemos también escribir así:

$$x^m = y^n \Longleftrightarrow y = [m, n](x) \Longleftrightarrow y = x^{[m,n]} \Longleftrightarrow y = \sqrt[n]{x^m}$$

Podemos también definir de manera análoga a la seguida en Def. 8 los subconjuntos $(Q_j)_{j\varepsilon N}$.

Se verifica la

Proposición 9.—Los $(Q_j)_{j\varepsilon N}$ son subsemigrupos multiplicativos. Los $\{Q_j - \{0'\}\}_{j\varepsilon N}$ son grupos. La correspondencia $[m, n]$ conserva el producto siendo $or[m, n] \subset Q_{n}'$ e im. $[m, n] \subset Q_{m}'$, pero en general $[m, n]$ no es un homomorfismo.

La demostración es análoga a la seguida en la Proposición 8, por lo cual nos vamos a fijar únicamente en lo siguiente:

La igualdad

$$\left(a^{\alpha n'}\right)^m = \left(a^{\alpha m'}\right)^n \tag{17}$$

para $a\varepsilon Q$ nos dice que

$$\text{or. } [m, n] \subset Q_{n}' \quad \text{e} \quad \text{im. } [m, n] \subset Q_{m}'$$

La correspondencia $[m, n]$ no es biunívoca en general, pues por (17) se ve que el hecho de que dos elementos sean o no correspondientes depende en parte de la paridad de m y n.

Fácilmente se deducen los cuatro casos siguientes:

1.° Si m y n son impares, la (17) nos da los correspondientes únicos $a^{\alpha n'} \longleftrightarrow a^{\alpha m'}$ para $a \varepsilon Q$, ya que

$$\left(a^{\alpha n'}\right)^m = \left(a^{\alpha m'}\right)^n \Longleftrightarrow a^{\alpha n'} \longrightarrow a^{\alpha m'}$$

2.° Si m es par y n es impar,

$$\left(a^{\alpha n'}\right)^m = \left(a^{\alpha m'}\right)^n \Longleftrightarrow a^{\alpha n'} \longrightarrow a^{\alpha m'} \qquad a \varepsilon + Q$$

$$\left(- a^{\alpha n'}\right)^m = \left(a^{\alpha m'}\right)^n \Longleftrightarrow - a^{\alpha n'} \longrightarrow a^{\alpha m'} \qquad a \varepsilon + Q$$

3.° Si m es impar y n par,

$$\left(a^{\alpha n'}\right)^m = \left(a^{\alpha m'}\right)^n \Longleftrightarrow a^{\alpha n'} \longrightarrow a^{\alpha m'} \qquad a \varepsilon + Q$$

$$\left(a^{\alpha n'}\right)^m = \left(- a^{\alpha m'}\right)^n \Longleftrightarrow a^{\alpha n'} \longrightarrow - a^{\alpha m'} \qquad a \varepsilon + Q$$

4.° Si m y n son pares,

$$\left(a^{\alpha n'}\right)^m = \left(a^{\alpha m'}\right)^n \Longleftrightarrow a^{\alpha n'} \longrightarrow a^{\alpha m'}$$

$$\left(- a^{\alpha n'}\right)^m = \left(a^{\alpha m'}\right)^n \Longleftrightarrow - a^{\alpha n'} \longrightarrow a^{\alpha m'}$$

$$\left(a^{\alpha n'}\right)^m = \left(- a^{\alpha m'}\right)^n \Longleftrightarrow a^{\alpha n'} \longrightarrow - a^{\alpha m'}$$

$$\left(- a^{\alpha n'}\right)^m = \left(- a^{\alpha m'}\right)^n \Longleftrightarrow - a^{\alpha n'} \longrightarrow - a^{\alpha m'}$$

En el primer caso, $[m, n]$ es un isomorfismo de Q_{n}' sobre Q_{m}'.

En el segundo caso, $[m, n]$ es un homomorfismo de Q_n' sobre $+ Qm'$ cuyo núcleo es $\{-1, +1\}$.

En el tercer caso, $[m, n]$ es la correspondencia inversa de un homomorfismo análogo al del segundo caso.

En el cuarto caso, $[m, n]$ es una correspondencia tal, que si hacemos clases en $Q_{n'}$ y $Q_{m'}$ poniendo en la misma clase $\{a^{\alpha n'}, -a^{\alpha n'}\}$ y $\{a^{\alpha m'}, -a^{\alpha m'}\}$ puede extenderse $[m, n]$ a un isomorfismo entre los conjuntos de clases que no son otros que los $+ Q_{n}'$ y $+ Q_{m}'$, respectivam nte.

Relación de iqualdad en el conjunto de correspondencias $\{[m, n]\}$. El análisis hecho en el punto anterior nos lleva a establecer la relación R″ en $\{[m, n]\}$.

Def. 11.

$$[m, n]\ R''\ [p, q] \iff mq = np \quad , \quad m \equiv p(2) \quad , \quad n \equiv q(2)$$

La relación R″ es una relación de igualdad, como se puede comprobar fácilmente.

Proposición 10.—Si $[m, n]$ R″ $[p, q]$ se verifica que ambas correspondencias son la misma para todos los $x \in Q_n' \cap Q_q'$.

En efecto, sean x e y elementos correspondientes por ambas $[m, n]$ y $[p, q]$. Se verifica por ello:

$$x^m = y^n \quad x^p = y^q \Rightarrow x^{mq} = x^{np} \Rightarrow mq = np$$

Como si $(\pm x)^m = (\pm y)^n$, también $(\pm x)^p = (\pm y)^q$ resulta que $m \equiv p(2)$, $n \equiv q(2)$.

Recíprocamente, supongamos que $mq = np$ y $m \equiv p(2)$ $n \equiv q(2)$ y sean x, y un par de elementos correspondientes por $[m, n]$ y x. z un par de correspondientes por $[p, q]$, se verifica:

$$x^m = y^n \quad x^p = z^q \Rightarrow x^{mq} = y^{nq}, \quad x^{pn} = z^{qn} \Rightarrow y^{nq} = z^{nq} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \pm z$$

pero como $m \equiv p(2)$ x^m y x^p tienen el mismo signo y, por tanto, y^n y z^q también tendrán el mismo signo, luego al ser $n \equiv q$ (2) resulta que se puede tomar $z = y$. y en general,

imagen de x por $[m, n]$ es la misma que imagen de x por $[p, q]$.

De la misma manera se prueba que si los pares x y y t, y son correspondientes por $[m, n]$ y $[p, q]$, respectivamente, se puede tomar $x = t$, y en general,

original de y por $[m, n]$ es el mismo que original de y por $[p, q]$.

De lo anterior se deduce la imposibilidad de definir la potencia de base un número racional y exponente un número racional positivo.

Así, por ejemplo, las fracciones (4, 6) y (2, 3) son representantes del mismo número racional, no obstante de lo cual

$$8 \xleftrightarrow{[4,6]} -4 \Leftrightarrow -4 = \sqrt[6]{8^4}$$

y, sin embargo, no son correspondientes por [2, 3], ya que $8^2 \neq (-4)^3$.

La relación de igualdad R″ nos permite obtener el conjunto cociente $\{[m, n]\}/_{R''}$, con el cual, a su vez, podemos definir en Q la potencia de base $x \in Q$ y exponente $[\mathbf{m}, \mathbf{n}] \in \{[m, n]\}/_{R''}$.

Def. 12. $x^{[\mathbf{m}, \mathbf{n}]} = x^{[m,n]}$ siendo $[m, n] \in [\mathbf{m}, \mathbf{n}]$.

Evidentemente $x \in / Q_{n'}$ siendo n' el menor denominador de las fracciones de la clase $[\mathbf{m}, \mathbf{n}]$.

De acuerdo con los cuatro casos señalados en el punto anterior, no siempre existe $x^{[\mathbf{m}, \mathbf{n}]}$ para $x \in Q_{n'}$ y, en caso de existir, no siempre es único.

Como al sumar y multiplicar congruencias módulo 2 resultan congruencias módulo 2, si definimos la adición y multiplicación en $[\mathbf{m}, \mathbf{n}]$ de la misma manera que en Def. 9 resulta.

Proposición 10.—El conjunto cociente $\{[m, n]\}/_{R''}$ es un semicuerpo. La correspondencia $i : \{[m, n]\}/_{R''} \longrightarrow +Q$, tal que $i\,[\mathbf{m}, \mathbf{n}] = \dfrac{m}{n}$, es un homomorfismo de semicuerpos cuyo núcleo es $\{[\mathbf{0}, \mathbf{1}]\ ,\ [\mathbf{0}, \mathbf{2}]\}$.

Las dos primeras partes son análogas a las proposiciones 7 y 8. Si $0 \in +Q$ y suponemos que $i\,([\mathbf{m}, \mathbf{n}]) = 0$ ha de ser $[\mathbf{m}, \mathbf{n}]$ de las formas $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ ó $[\mathbf{0}, \mathbf{2}]$, con lo que queda demostrada la última parte.

Notas.—1.ª Si en la Def. 1. hubiésemos considerado m y n enteros, de una manera análoga a la seguida, se habrían obtenido las definiciones y propiedades de las potencias de exponente fraccionario, tanto positivas como negativas.

2.ª Las propiedades de las potencias estudiadas en este trabajo se pueden ampliar a estructuras algebraicas más generales, con la condición de ser dichas estructuras de factorización única.

INSTITUTO «JORGE JUAN» DEL C. S. I. C.