EXPRESION SIMBOLICA OPERACIONAL DEL OPERADOR $d^m z$ Y APLICACION A LOS CAMBIOS DE VARIABLES EN EXPRESIONES ENTRE DERIVADAS PARCIALES

Por

Jesús Casanova

I. Introducción

Es sabido que la diferencial total emésima de una función compuesta

$$z = z(u_1, u_2, \ldots u_n) \quad ,, \quad u_i = u_i(x_1, x_2 \ldots x_p) \quad ,, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

depende de las variables dependientes u_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ y de las diferenciales totales sucesivas $d^v u_i$ $(i = 1, 2 \ldots n,\ v = 1, 2 \ldots m)$. La obtención de la expresión general de ésta requería hasta ahora el cálculo de las diferenciales totales sucesivas de z, partiendo siempre de la anterior, hasta llegar a la del orden requerido, agrupando a continuación los términos semejantes.

El proceso queda sumamente simplificado y sistematizado si se puede calcular «directamente» la expresión de la $d^m z$, sin el recurso de las diferenciales totales de órdenes inferiores, y resultan ya agrupados en la expresión obtenida los términos semejantes. Este es precisamente el objeto del presente trabajo: la obtención de una fórmula simbólica operacional que dé la expresión general de la diferencial total emésima de una función compuesta $z = z(u_1, u_2 \ldots u_n)$, mediante simples operaciones enteras con los operadores d_h.

$$d_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{\delta u_i} d^h u_i \quad (h = 1, 2, \ldots m)$$

y cuyo desarrollo conduzca a términos no semejantes.

II. Relaciones con los operadores d, d_h y $\frac{\delta}{\delta u_i}$

1.° El producto de los operadores d y $\frac{\delta}{\delta u_i}$ es conmutativo. Es decir, la diferencial total de una derivada parcial es igual a la derivada parcial de la diferencial total.

$$d\left(\frac{\delta}{\delta u_i} z\right) = \frac{\delta}{\delta u_i}(dz)$$

En efecto:

$$d\left(\frac{\delta z}{\delta u_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2 z}{\delta u_i \delta u_j} du_j = \frac{\delta}{\delta u_i}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\delta z}{\delta u_j} du_j\right] = \frac{\delta}{\delta u_i}(dz)$$

2.° El producto del operador d por el d_h es igual al producto del operador d_h por el d incrementado en el operador d_{h+1}

$$dd_h = d_h d + d_{h+1}$$

En efecto: con el auxilio de la anterior propiedad y las ya conocidas de la diferencial total se deduce:

$$d\,(d_h z) = d\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta z}{\delta u_i} d^h u_i\right] = \sum_{i=1}^{n} d\left[\frac{\delta z}{\delta u_i} d^h u_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(d\frac{\delta z}{\delta u_i}\right) d^h u_i + \frac{\delta z}{\delta u_i} d^{h+1} u_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(dz)}{\delta u_i} d^h u_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{dz}{\delta u_i} d^{h+1} u_i = d_h(dz) + d_{h+1} z$$

O expresado en forma simbólica:

$$d\,d_h = d_h\,(d_1 + d)$$

en la que ha de operarse con los subíndices a la manera de exponentes.

3.° El operador d_h es un operador lineal, y el producto de los operadores d_h es conmutativo, asociativo y distributivo.

$$d_h(az) = a(d_h z) \;,,\; ad_h + bd_h = (a+b)d_h \;,,\; ad_h \pm ad_k = a(d_h + d_k)$$
$$d_h d_k = d_k d_h \;,,\; d_h(d_k d_l) = (d_h d_k) d_l \;,,\; d_l(ad_h \pm bd_k) = ad_l d_h \pm bd_l d_k$$

Cuya cómoda demostración, a base de operaciones con las Σ, dejamos al cuidado del lector, y cuyo producto se entiende simbólico respecto de la operación de derivación:

$$\frac{\delta}{\delta u_i} \cdot \frac{\delta}{\delta u_j} = \frac{\delta^2}{\delta u_i \delta_j}$$

III. Expresión simbólica operacional del operador d^m

1.º Con el recurso de las propiedades expuestas en el párrafo II, se pueden establecer las siguientes igualdades simbólicas:

$$\begin{aligned} d &= d_1 \\ d^2 &= dd_1 = d_2 + d_1 d = d_1(d_1 + d) \\ d^3 &= d(d_2 + d_1 d) = d_2(d_1 + d) + d_1(d_1 + d)d = d_1(d_1 + d)^{(2)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En las que ha de operarse con los subíndices a la manera de exponentes.

Se observa una determinada ley que supondremos cierta hasta la d^m inclusive. Es decir:

$$d^m = d_1(d_1 + d)^{(m-1)} = \sum_{p=0}^{m-1} \binom{m-1}{p} d_{m-p} d^p$$

diferenciando nuevamente

$$d^{m+1} = d\left[\sum_{p=0}^{m-1} \binom{m-1}{p} d_{m-p}\, d^p\right] = \sum_{p=0}^{m-1} \binom{m-1}{p} d(d_{m-p} d^p)$$

$$= \sum_{p=0}^{m-1} \binom{m-1}{p} d_{m-p}\,(d_1 + d)d^p = [d_1(d_1 + d)^{(m-1)}](d_1 + d) =$$

$$= d_1\,(d_1 + d)^{(m)}$$

Luego la ley es general: $d^m = d_1(d_1 + d)^{(m-1)}$

2.º Aplicando esta ley a las diferenciales totales sucesivas se tiene:

$$
\begin{aligned}
d &= d_1 \\
d^2 &= d_1(d_1 + d) = d_2 + d_1 d \\
d^3 &= d_1(d_1 + d)^{(2)} = d_3 + 2d_2 d + d_1 d^2 \\
d^4 &= d_1(d_1 + d)^{(3)} = d_4 + 3d_3 d + 3d_2 d^2 + d_1 d^3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
d^m &= d_1(d_1 + d)^{(m-1)} = d_m + \binom{m-1}{1} d_{m-1} d + \\
&+ \binom{m-1}{2} d_{m-2} d^2 + \dots + \binom{m-1}{m-1} d_1 d^{m-1}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Por sustituciones sucesivas, y con el recurso de las propiedades de los operadores d_h (II—3), que permiten operar con ellos como si fueran factores numéricos, se obtiene la expresión del operador d^m (diferencial total emésima) en función de los operadores d_h.

Pero el mismo resultado produce la eliminación en el sistema (1) de los operadores d, d^2, d^3, ... d^{m-1}, por medio de la anulación de la resultante:

$$
\begin{vmatrix}
d_1 + 0 & -1 & 0 \dots\dots\dots & 0 \\
d_2 + 0 & d_1 & -1 \dots\dots\dots & 0 \\
d_3 + 0 & 2d_2 & d_1 \dots\dots\dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
d_m - d^m & \binom{m-1}{1} d_{m-1} & \binom{m-1}{2} d_{m-2} \dots & d_1
\end{vmatrix} = 0
$$

Desdoblando el primer miembro en suma de dos determinantes, con los primeros y segundos sumandos de la primera columna respectivamente, el segundo de los cuales resulta ser igual a $(-d^m)$, permite despejar d^m. Se obtiene así, por fin, la siguiente expresión simbólica operacional del operador d^m (diferencial total emésima), en función de los operadores d_i ($i = 1, 2, \dots m$).

$$
d^m = \begin{vmatrix}
d_1 & -1 & 0 & 0 \dots\dots\dots & 0 \\
d_2 & d_1 & -1 & 0 \dots\dots\dots & 0 \\
d_3 & 2d_2 & d_1 & -1 \dots\dots\dots & 0 \\
d_4 & 3d_3 & 3d_2 & d_1 \dots\dots\dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
d_m & \binom{m-1}{1} d_{m-1} & \binom{m-1}{2} d_{m-2} & \binom{m-1}{3} d_{m-3} \dots & d_1
\end{vmatrix} \qquad (2)
$$

Los coeficientes de los operadores d_i son precisamente los elementos del triángulo de Targtalia, y, por lo tanto, uno cualquiera de ellos es igual a la suma del que tiene encima más el de la izquierda de este último. Los productos de los operadores d_i son conmutativos, como ya hemos expuesto, y son simbólicos respecto a la operación de derivación, pero no así respecto a la de diferenciación; es decir:

$$\frac{\delta}{\delta u_i} d^h u_i \cdot \frac{\delta}{\delta u_j} d^k u_j = \frac{\delta^2}{\delta u_i \delta u_j} d^h u_i \cdot d^k u_j \quad (i = j \text{ o } i \neq j)$$

4.º Si las variables u_i son funciones lineales de las variables independientes, son nulas todas las $d^h u_i$ a partir de $h = 2$ en adelante, y son también nulos, por consiguiente, los operadores d_h a partir de $h = 2$, y el determinante (2) se reduce al producto de los elementos de la diagonal principal

$$d^m = d_1{}^{(m)}$$

Y en general, si las u_i son polinomios de grado p, son nulos los operadores d_h a partir de $h = p + 1$, y en el determinante (2) se anulan las diagonales secundarias a partir de la $(p + 1)^a$ en adelante.

5.º He aquí una aplicación de la fórmula (2) al caso de una función compuesta de otras dos u y v.

$$d^2 = \begin{vmatrix} d_1 & -1 \\ d_2 & d_1 \end{vmatrix} = d_1{}^{(2)} + d_2 = \left(\frac{\delta}{\delta d} du + \frac{\delta}{\delta v} dv\right)^{(2)} + \\ + \left(\frac{\delta}{\delta u} d^2u + \frac{\delta}{\delta v} d^2v\right)$$

$$d^3 = \begin{vmatrix} d_1 & -1 & 0 \\ d_2 & d_1 & -1 \\ d_3 & 3d_2 & d_1 \end{vmatrix} = d_1{}^{(3)} + 3d_1d_2 + d_3 = \left(\frac{\delta}{\delta u} du + \frac{\delta}{\delta v} dv\right)^{(3)} + \\ + 3\left(\frac{\delta}{\delta v} du + \frac{\delta}{\delta v} dv\right)\left(\frac{\delta}{\delta u} d^2u + \frac{\delta}{\delta v} d^2v\right) + \\ + \left(\frac{\delta}{\delta u} d^3u + \frac{\delta}{\delta v} d^3v\right)$$

$$d^4 = \begin{vmatrix} d_1 & -1 & 0 & 0 \\ d_2 & d_1 & -1 & 0 \\ d_. & 2d_2 & d_1 & -1 \\ d_4 & 3d_3 & 3d_2 & d_1 \end{vmatrix} = d_1{}^{(4)} + 6d_1{}^{(2)}d_2 + 4d_1d_3 + 3d_2{}^2 + d_4 = \\ = \left(\frac{\delta}{\delta u} du + \frac{\delta}{\delta v} dv\right)^{(4)} + 6\left(\frac{\delta}{\delta u} d^2u + \right.$$

$$+ \frac{\delta}{\delta v} d^2 v\Big) \left(\frac{\delta}{\delta u} du + \frac{\delta}{\delta v} dv\right)^{(2)} + 3 \left(\frac{\delta}{\delta u} d^2 u + \frac{\delta}{\delta v} d^2 v\right)^{(2)} +$$

$$+ 4 \left(\frac{\delta}{\delta u} du + \frac{\delta}{\delta v} dv\right) \left(\frac{\delta}{\delta u} d^3 u + \frac{\delta}{\delta v} d^3 v\right) + \left(\frac{\delta}{\delta u} d^4 u + \frac{\delta}{\delta v} d^4 v\right)$$

Nótese la imposibilidad de la existencia de términos semejantes en el desarollo de estas expresiones, si antes ya se han reducido términos semejantes en los desarrollos de los determinantes.

IV. Aplicación al cambio de variables en ciertas expresiones de derivadas parciales

1.º Una interesante aplicación de la fórmula (2) recae en el problema de cambiar las variables independientes en expresiones simbólicas entre derivadas parciales, de la forma:

$$E \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta z}{\delta x_i} A_i \right)^{(m)} =$$

$$+ \sum \frac{|\underline{m}}{|\underline{\alpha_1}\, |\underline{\alpha_2} \dots |\underline{\alpha_n}} \; \frac{\delta^m z}{\delta x_1^{\alpha_1} \delta x_2^{\alpha_2} \dots \delta x_n^{\alpha_n}} A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$$

Donde los coeficientes A_i son constantes, o en general funciones de las variables independientes x_i $(i = 1, 2 \dots n)$.

Sean u_i $(i = 1, 2, \dots n)$ las nuevas variables, ligadas a las primitivas por las fórmulas

$$u_i = u_i (x_1, x_2, \dots x_n) \quad (i = 1, 2, \dots n) \tag{3}$$

La expresión E es la diferencial total emésima de z, en la que se han atribuido a los incrementos arbitrarios dx_i de las variables independientes, los valores

$$dx_i = A_i \quad (i = 1, 2, \dots n) \tag{4}$$

La citada expresión quedará, pues, transformada, en función ya de las nuevas variables u_i, sin más que expresar la $d^m z$ en función de estas variables con el recurso de la fórmula (2):

$$E \equiv d^m z = \begin{vmatrix} d_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ d_2 & d_1 & -1 & \dots & 0 \\ d_3 & 2d_2 & d_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_m & \binom{m-1}{1} d_{m-1} & \dots & \dots & d_1 \end{vmatrix} z \qquad d_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{\delta u_i} d^h u_i$$

Quedando el problema reducido al cálculo de las diferencias $d^h u_i$, deducidas de las fórmulas (3) teniendo en cuenta las (4):

$$d^h u_i = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\delta u_i}{\delta x_j} A_j \right]^{(h)} \qquad (i = 1, 2, \dots n; \quad h = 1, 2, \dots m)$$

Ejemplo: En la expiesión

$$E = \left(\frac{\delta z}{\delta x} x + \frac{\delta z}{\delta y} y \right)^{(p)}$$

verificar el cambio de las variables independientes, definido por las fórmulas: $u = f(x, y)$, $v = \varphi(x, y)$, donde f y φ representan funciones homogéneas de grados m y n respectivamente.

He aquí el cálculo:

$$E \equiv d^p z \begin{pmatrix} dx = x \\ dy = y \end{pmatrix} = \left(\frac{\delta z}{\delta u} du + \frac{\delta z}{\delta v} dv \right)^{(p)} + \dots + \frac{\delta z}{\delta u} d^p u + \frac{\delta z}{\delta v} d^p v$$

Y aplicando el teorema de Euler, y su generalización, se calculan rápidamente los coeficientes du, dv, ... $d^p u$, $d^p v$.

$$du = f_x' dx + f_y' dy = f_x' x + f_y' y = mu$$

$$dv = \varphi_x' x + \varphi_y' y = nv$$

$$d^q u = (f_x' x + f_y' y)^{(q)} = m(m-1) \dots (m-q+1) u$$

$$d^q v = n(n-1) \dots (n-q+1) v$$

quedando así concluido el cambio de variables.

Si f y φ son homogéneas de grado 1, por ser ahora $d^q u = d^q v = 0$ para $q > 1$, la expresión transformada queda invariante:

$$E \equiv \left(\frac{\delta z}{\delta u} u + \frac{\delta z}{\delta v} v \right)^{(p)}$$

Si u y v son las coordenadas polares ρ ω,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(homogénea de grado 1)}$$

$$\omega = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{(homogénea de grado 0)}$$

Y al ser ahora $d\rho = \rho$ $\quad d^q \rho = 0$ para $q > 1$

$d\omega = 0 \quad d^q\omega = 0$ para $q > 1$

La expresión transformada se reduce a $E \equiv \dfrac{\delta^p z}{\delta \rho^p} \rho^p$.

2.º *Si el cambio es lineal*, son nulas todas las diferenciales $d^h u_i$ para $h > 1$, y en consecuencia, $d_h z = 0$ para $h > 1$; y la expresión transformada es:

$$E \equiv \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta z}{\delta u_i} du_i \right]^{(m)} \quad ,, \quad du_i \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta u_i}{\delta x_j} A_j$$

Ejemplo: En la expresión

$$E \equiv \left(\frac{\delta z}{\delta x} y - \frac{\delta z}{\delta y} x \right)^{(n)}$$

verificar el cambio de las variables independientes, definido por las fórmulas:

$$u = x + y - 1 \qquad v = x - y + 1$$

Procediendo con arreglo al método expuesto, se tiene:

$$E \equiv d^n z \begin{pmatrix} dx = y \\ dy = -x \end{pmatrix} = \left(\frac{\delta z}{\delta u} du + \frac{\delta z}{\delta v} dv \right)^{(n)}$$

y siendo:

$$du = dx + dy = y - x = 1 - v, \qquad dv = dx - dy = y + x = u - 1$$

se obtiene la expresión transformada

$$E \equiv \left(\frac{\delta z}{\delta u} (1 - v) + \frac{\delta z}{\delta v} (u - 1) \right)^{(n)}$$

3.º *Si los coeficientes* A_i de la expresión E *se reducen a constantes*, también lo son las diferenciales $dx_i = A_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Y solamente en este caso, una vez calculadas las du_i,

$$du_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta u_i}{\delta x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta u_i}{\delta x_j} A_j = \varphi_i (u_1, u_2 \ldots u_n) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

es lícito, a partir de estos resultados, obtener los siguientes:

$$d^2 u_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta \varphi_i}{\delta u_j} du_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta \varphi_i}{\delta u_j} \varphi_j = \varphi_i (u_1, u_2 \ldots u_n) \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

$$d^3 u_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta \varphi_i}{\delta u_j} du_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta \varphi_i}{\delta u_j} \varphi_j , \qquad \text{y así sucesivamente.}$$

Ejemplo: En la expresión

$$E \equiv \left(\frac{\delta V}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta y} + \frac{\delta V}{\delta z} \right)^{(2)}$$

verificar el cambio de las variables independientes, definido por las fórmulas: $u = x + y + z$, $v = xy + xz + yz$, $\omega = x\,y\,z$.

Procediendo como en el caso general,

$$E = d^2 V \begin{pmatrix} dx = 1 \\ dy = 1 \\ dz = 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\delta V}{\delta u} du + \frac{\delta V}{\delta v} du + \frac{\delta V}{\delta \omega} d\omega \right)^{(2)} +$$

$$+ \frac{\delta V}{\delta u} d^2 u + \frac{\delta V}{\delta v} d^2 v + \frac{\delta V}{\delta \omega} d^2 \omega$$

y siendo ahora

$$\begin{aligned}
du &= dx + dy + dz = 3 \\
d^2 u &= d3 = 0 \\
dv &= (d + z)\, dx + (x + z)\, dy + (x + y)\, dz = 2\,(x + y + z) = 2u \\
d^2 v &= 2\, du = 6 \\
d\omega &= yzdx + xzdy + ydz = xy + xz + yz = v. \\
d^2 \omega &= dv = 2\, u \text{ ó}
\end{aligned}$$

se obtiene la expresión transformada

$$E \equiv \left(3 \frac{\delta V}{\delta u} + 2u \frac{\delta V}{\delta v} + v \frac{\delta V}{\delta \omega} \right)^{(2)} + 6 \frac{\delta V}{\delta v} + 2u \frac{\delta V}{\delta \omega}$$

4.º La teoría desarrollada en este párrafo permite cambiar las variables en las derivadas

$$\frac{\delta^m z}{\delta x_i{}^m} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ n),$$

directamente y sin previo cálculo de las derivadas de orden inferior

En efecto: se tiene

$$\frac{\delta^m z}{\delta x_i{}^m} = d^m z \begin{pmatrix} dx_i = 1 & \\ dx_j = 0 & j \neq i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & -1 & \dots\dots 0 \\ d_2 & d_1 & \dots\dots 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ d_m & \binom{m-1}{1} d_{m-1} \dots\dots & d_1 \end{vmatrix} z$$

siendo ahora

$$d_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta u_j} dsu_j = \sum_{j=1}^{p} \frac{\delta}{\delta d_j} \cdot \frac{dsu_j}{\delta x_i{}^p}$$

Pudiendo también procederse como en (3.º), ya que en este caso se está al ser 1 y 0 constantes.

5.º También procede el empleo de este método en ciertos casos de cambio de las variables independientes y de la función.

Así, si se trata, por ejemplo, de cambiar las variables y la función en la expresión

$$E \equiv \left(\frac{\delta z}{\delta x} y + \frac{\delta z}{\delta y} x\right)^{(n)} = d^n z \begin{pmatrix} dx = y \\ dy = x \end{pmatrix}$$

mediante las fórmulas del cambio

$$u = x + y, \qquad v = x - y, \qquad \omega = x + 2y - z$$

Procederemos a diferenciar n veces consecutivas la tercera fórmula del cambio

$$d^n z = -d^n\omega = \left(\frac{\delta\omega}{\delta u} du + \frac{\delta\omega}{\delta v} dv\right)^{(n)} + \dots + \frac{\delta\omega}{\delta u} d^n u + \frac{\delta\omega}{\delta v} d^n v$$

y siendo, por las dos primeras fórmulas,

$$\begin{aligned} du &= dx + dy = y + x = u \qquad & d^2u &= 0 = d^3u = \dots\dots \\ dv &= dx - dy = y - x = v \qquad & d^2v &= 0 = d^3v = \dots\dots \end{aligned}$$

Se obtiene rápidamente la expresión transformada

$$E \equiv -d^n\omega \equiv -\left(\frac{\delta\omega}{\delta u} u - \frac{\delta\omega}{\delta v} v\right)^{(n)}$$