SOBRE EL CONCEPTO ELEMENTAL DE AREA

por

MIGUEL L. LAPLAZA GRACIA

La introducción del concepto elemental de área de polígonos puede hacerse a través de la siguiente relación de equivalencia:

Dos polígonos son equivalentes cuando y sólo cuando pueden descomponerse en el mismo número de polígonos iguales.

Esta definición supone que los conceptos elementales de geometría del plano euclídeo se han introducido mediante un sistema de postulados que parten de los movimientos, o bien, mediante unas ideas intuitivas que sean equivalentes a un sistema de este tipo. En los cursillos que para profesores de enseñanza media ha organizado en fecha reciente la Escuela de Formación del Profesorado, se ha seguido un sistema de este tipo.

Por otra parte, el autor de esta nota ha publicado una serie de notas sobre la proporcionalidad y medida de segmentos, la primera de las cuales es »Teoría elemental de la proporcionalidad y medida de segmentos» (*Gaceta Matemática*, XV (1963), introduciendo un concepto de medida un poco distinto del habitual.

El objeto de esta nota es relacionar el concepto de área y el concepto de medida de segmentos.

I. SUPUESTOS

Debe demostrarse, a través de la relación de equivalencia enunciada:

a) Todo polígono es equivalente a un rectángulo con un lado dado.

b) Si dos rectángulos son equivalentes y tienen un lado igual, tienen igual el otro lado, y, por lo tanto, son iguales.

En las notas citadas sobre la proporcionalidad y medida de segmentos se demuestra lo siguiente:

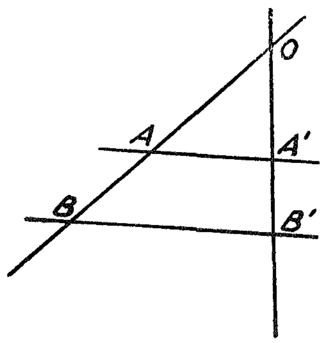

Figura 1

c) En la figura 1, la condición necesaria y suficiente para que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$$

o para que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

es que las rectas AA' y BB' sean paralelas.

d) La condición necesaria y suficiente para que, siendo $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ segmentos arbitrarios, se verifique que

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{\bar{c}}{\bar{d}}$$

es que se verifique que

$$\frac{m(\bar{a})}{m(\bar{b})} = \frac{m(\bar{c})}{m(\bar{d})}$$

en que $m(\bar{a})$, $m(\bar{b})$, $m(\bar{c})$ y $m(\bar{d})$ son las medidas de los segmentos $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, con respecto a cualquier unidad $\bar{u}$.

Hagamos notar que $\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ es una razón de segmentos, en tanto que $\frac{m(\bar{a})}{m(\bar{b})}$ es un cociente, ya que entre las medidas se ha definido una multiplicación en que todo elemento admite un elemento inverso.

II. CONDICIONES DE EQUIVALENCIA DE RECTANGULOS

Siempre que empleemos el signo $\cup$ lo haremos en el sentido de unión conjuntista.

Hagamos una construcción como la que indican las figuras 2, 3 y 4.

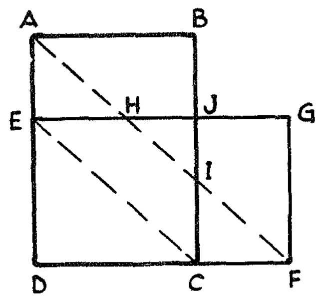

Figura 2

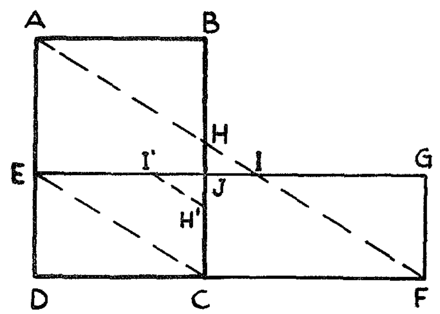

Figura 3

en las que se ha partido de un rectángulo ABCD, se ha tomado un punto arbitrario E en el lado AD y se ha tomado el punto F, de modo que AF sea una recta paralela a la recta EC. Las tres figuras corresponden a los tres casos posibles que se pueden plantear. El punto G se ha tomado de forma que EDFG sea un rectángulo.

Nuestro objeto es demostrar que en cualquiera de estos tres casos el rectangulo ABCD es equivalente al EGFD, o sea que:

$$ABCD \sim EGFD$$

Caso de la figura 2:

$$ABCD = EHICD \cup ABI \cup AHE$$

$$EGFD = EHICD \cup HGF \cup ICF$$

Expresiones en que los polígonos se indican mediante los vértices tomados en un cierto orden.

El triangulo ABI y el HGF son iguales, ya que por las hipótesis de paralelismo de las rectas EC y AF se verifica que

$$ABI = ECD$$

$$ECD = HFG$$

puesto que son rectángulo con dos lados iguales.

El triángulo AHE y el ICF son iguales, puesto que son triángulos

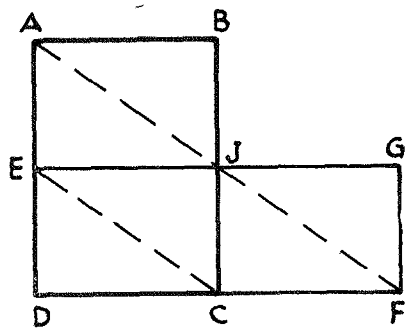

Figura 4

rectangulos que por la razón indicada anteriormente tienen dos lados iguales.

Y de acuerdo con la definición de equivalencia que se ha dado:

$$ABCD \sim EGFD$$

Caso de la figura 3:

En la figura 3 se ha tomado $\overline{I'J} = \overline{IJ}$, y la recta I'H' paralela a la recta AF y, por consiguiente, los triángulos HJI y H'JI' son iguales, y de aquí se deduce que:

$$ABCD = EI'H'CD \cup I'JH' \cup AEJH \cup AHB \sim$$

$$\sim EI'H'CD \cup IJH \cup AEJH \cup AHB =$$

$$= EI'H'CD \cup AEI \cup AHB$$

o sea, que

$$ABCD \sim EI'H'CD \cup AEI \cup AHB$$

Análogamente,

$$EGFD = EI'H'CD \cup I'JH' \cup JIFC \cup IGF \sim$$

$$\sim EI'H'CD \cup IJH \cup JIFC \cup IGF =$$

$$= EI'H'CD \cup HCF \cup IGF$$

y, por lo tanto,

$$EGFD \sim EI'H'CD \cup HCF \cup IGF$$

El triángulo AEI y el HCF son iguales, puesto que son rectángulos, y que de acuerdo con las hipótesis de paralelismo de las rectas AF y EC tienen dos lados iguales.

El triángulo AHB y el IGF son iguales, ya que de acuerdo con las hipótesis de paralelismo de las rectas AF y EC, son:

$$AHB = EDC$$
$$EDC = IGF$$

por ser triángulos rectangulos con dos lados iguales.

Por consiguiente:

$$EI'H'CD \cup AEI \cup AHB \sim EI'H'CD \cup HCF \cup IGF$$

y, por lo tanto,

$$ABCD \sim EGFD$$

Caso de la figura 4:

$$ABCD = EJCD \cup AJE \cup ABJ$$

$$EGFD = EJCD \cup JCF \cup JGF$$

El triángulo AJE y el JCF son iguales por ser rectángulos con dos lados iguales.

Analogamente,

$$ABJ = ECD = JGF$$

y, por consiguiente,

$$ABCD \sim EGFD$$

Vamos a ver a continuación que si dos rectángulos ABCD y A'B'C'D' son equivalentes, que se verifica

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{AD}}$$

En efecto, siempre podemos suponer que $AB \geqslant A'B'$, y tomando

$$\overline{ED} = \overline{A'B'}$$

y haciendo la construcción anterior, acabamos de vér que

$$EGDF \sim ABCD$$

y como por hipótesis

$$A'B'C'D' \sim ABCD$$

nos resulta que

$$EGDF \sim A'B'C'D'$$

y como estos dos rectángulos tienen un lado igual, de acuerdo con *b)* se verifica

$$\overline{DF} = \overline{A'B'}$$

Pero siendo la recta AF paralela a la recta EC, de acuerdo con *d)*

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DA}}$$

esto es:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{AD}}$$

con lo que queda demostrado.

Recíprocamente, supongamos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{AD}}$$

Hagamos una construcción semejante, tomando $\overline{ED} = \overline{A'B'}$, $\overline{DF} = \overline{B'C'}$, según *c)*, tenemos que las rectas AF y EC son paralelas y, por lo tanto, los dos rectángulos son equivalentes.

Podemos resumir los resultados anteriores diciendo que la condición necesaria y suficiente para que dos rectángulos ABCD y A'B'C'D' sean equivalentes, es que se verifique que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{AD}}$$

Aplicando a este resultado *d)*, nos resulta que la condición necesaria y suficiente para que dos rectángulos ABCD, A'B'C'D' sean equivalentes es que

$$\frac{m(\overline{\mathrm{AB}})}{m(\overline{\mathrm{A'B'}})} = \frac{m(\overline{\mathrm{A'D'}})}{m(\overline{\mathrm{AD}})}$$

o, lo que es lo mismo, que

$$m(\mathrm{AB})\, m(\mathrm{AD}) = m(\mathrm{A'B'})\, m(\mathrm{A'D'})$$

Conclusión: Se deduce de lo expuesto que es natural el asignar a cada rectángulo como área el producto de las medidas de sus lados, ya que esto caracteriza a los rectángulos de cada clase de equivalencia.

Instituto Jorge Juan del C. S. I. C.