SOBRE UN METODO PARA HALLAR UNA BASE DEL ESPACIO COCIENTE

por

J. J. GUTIERREZ SUÁREZ

El objeto de esta nota es hallar una base del espacio cociente V/L conociendo una base B del espacio vectorial V, y las ecuaciones de la variedad lineal L.

Sea dim V $= n$ y dim L $= m$, de donde se deduce:

$$\dim V/L = n - m = r$$

Sabemos que la condición necesaria y suficiente para que L sea una variedad lineal de dimensión $n - m = r$, es que se verifique el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{array} \qquad [1]$$

con matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}a_{r2} \cdots a_{rn} \end{pmatrix}$$

de rango $rang(A) = r$, es decir, existirá por lo menos un menor de orden r de la matriz A distinto de cero:

$$C = \begin{pmatrix} a_{1i_1}a_{1i_2} \cdots a_{1ir} \\ a_{2i_1}a_{2i_2} \cdots a_{2ir} \\ \dots\dots\dots \\ a_{ri_1}a_{ri_2} \cdots a_{rir} \end{pmatrix}$$

Supongamos que las ecuaciones [1] de la variedad lineal L han sido obtenidas eligiendo como base la B $= (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ del espacio vectorial V. Si de ella elegimos los vectores cuyos índices son $i_1, i_2, \ldots, i_r$, es decir, $ui_1, ui_2, \ldots, ui_r$, vamos a demostrar que:

$$\tilde{B} = (u_{i1} + L,\ u_{i2} + L,\ \ldots,\ u_{ir} + L)$$

es una base de V/L.

En efecto, para que se verifique

$$\lambda_{i1}(u_{i1} + L) + \lambda_{i2}(u_{i2} + L) + \ldots + \lambda_{ir}(u_{ir} + L) = 0 + L \qquad (1)$$

deberá suceder que

$$\lambda_{i1}u_{i1} + \lambda_{i2}u_{i2} + \ldots + \lambda_{ir}u_{ir} \in L \qquad (2)$$

lo que implica que el vector de coordenadas

$$(0, \ldots, \lambda_{i1}, 0, \ldots, 0, \lambda_{i2}, 0, \ldots, 0, \lambda_{ir}, 0, \ldots, 0) \in L$$

y por consiguiente, dichas coordenadas verifican las ecuaciones [1], quedando, por tanto,

$$\begin{array}{l} a_{1i1}\lambda_{i1} + a_{1i2}\lambda_{i2} + \ldots + a_{1ri}\lambda_{ir} = 0 \\ a_{2i1}\lambda_{i1} + a_{2i2}\lambda_{i2} + \ldots + a_{2ir}\lambda_{ir} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{ri1}\lambda_{i1} + a_{ri2}\lambda_{i2} + \ldots + a_{rir}\lambda_{ir} = 0 \end{array} \qquad (3)$$

Sistema homogéneo cuya matriz C es de rango r igual al número de incógnitas; luego, la única solución es:

$$\lambda_{i1} = \lambda_{i2} = \ldots = \lambda_{ir} = 0$$

que nos dice que $\tilde{B}$ es una base del espacio cociente V/L.

Podemos ver la aplicación práctica de este método resolviendo como ejemplo el siguiente problema:

Dada la variedad lineal L engendrada por los vectores $\overline{v_1}(1, 1, 1, 0)$ y $\overline{v_2}$ (0, 1, 0, 1), hallar las ecuaciones del homomorfismo. $v \xrightarrow{f} V/L$ definido por $x \longrightarrow x + L$.

SOLUCIÓN:

Las ecuaciones paramétricas de la variedad lineal L serán:

$$\overline{x} = \lambda\overline{v_1} + \mu\overline{v_2}$$

es decir,

$$(x_1, x_2, x_3\ x_4) = \lambda(1, 1, 1, 0) + \mu(0, 1, 0, 1)$$

y, por consiguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda \\ x_2 &= \lambda + \mu \\ x_3 &= \lambda \\ x_4 &= \mu \end{aligned}$$

Eliminando λ y μ queda:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ x_1 \qquad - x_3 \qquad &= 0 \end{aligned} \qquad [1^*]$$

que son las ecuaciones no paramétricas de la variedad L, siendo dim L = 2.

La dimensión del espacio cociente será dim V/L = dim V — dim L = 4 — 2 = 2; luego para hallar su base bastará hallar dos vectores $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ que sean linealmente independientes.

Según el método enunciado anteriormente bastará elegir en la matriz del sistema [1*] un menor de segundo orden no nulo, por ejemplo:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que al estar formado por las dos primeras columnas nos dará:

$$\tilde{u}_1 = u_1 + L$$
$$\tilde{u}_2 = u_2 + L$$

El homomorfismo f hace corresponder:

$$u_1 \longrightarrow u_1 + L = \tilde{u}_1$$
$$u_2 \longrightarrow u_2 + L = \tilde{u}_2$$
$$u_3 \longrightarrow u_3 + L = \tilde{u}_3$$
$$u_4 \longrightarrow u_4 + L = \tilde{u}_4$$

Hallando las coordenadas de $u_3 + L$ y $u_4 + L$ respecto de la base $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ tendremos perfectamente definido el homomorfismo.

Sea $u_3 + L = \lambda\tilde{u}_1 + \mu\tilde{u}_2 = \lambda(u_1 + L) + \mu(u_2 + L)$ lo que implica que $\lambda u_1 + \mu u_2 - u_3 \in L$, es decir,

$$\lambda(1, 0, 0, 0) + \mu(0, 1, 0, 0) - (0, 0, 1, 0) \in L \Rightarrow$$
$$(\lambda, \mu, -1, 0) \in L$$

luego verificará las ecuaciones [1*] y obtendremos:

$$\begin{aligned} \lambda - \mu &= 0 \\ \lambda + 1 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda &= -1 \\ \mu &= -1 \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\tilde{u}_3 = -\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$$

Análogamente hallaríamos $\tilde{u}_4 = -\tilde{u}_2$.

Así el homomorfismo estara definido por:

$$
\begin{aligned}
f(u_1) &= \tilde{u}_1 \\
f(u_2) &= \qquad\quad \tilde{u}_2 \\
f(u_3) &= -\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \\
f(u_4) &= \qquad\; -\tilde{u}_2
\end{aligned}
$$

y su ecuación matricial sera:

$$
(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

o representada por las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= x_1 \qquad\; - x_3 \\
\tilde{x}_2 &= \qquad x_2 - x_3 - x_4
\end{aligned}
$$

COMPROBACIÓN:

Sabiendo que el núcleo de este homomorfismo tiene que ser L, debe suceder que haciendo $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$ las anteriores ecuaciones sean las de [1*], lo que se comprueba facilmente.