DIFERENCIAL COORDENADA DE UNA CURVA

Por

AQUILINO PÉREZ DE MADRID

1. INTRODUCCIÓN

Lo que pretendemos hacer es aplicar la Diferencial de un espacio topológico definida por F. Botella Raduán, en su trabajo publicado en la R. M. H. A. (números 1 y 2, 1961), al caso particular de que el espacio topológico sea una curva.

Demostraremos que la diferencial en un punto de la curva viene representada por la expresión

$$\vec{dyx^*_o} = \vec{u}_1 ds + \frac{1}{\rho}\vec{u}_2 ds.$$

Empezaremos por determinar y estudiar las particularidades que presentan los elementos que después utilizaremos.

2. MODO DE DEFINIR LA CURVA

La curva X viene dada por T, un intervalo cerrado y acotado de la recta real, y por f, una aplicación continua de T en un espacio topológico euclídeo tridimensional. La aplicación f es el conjunto de las tres funciones reales y continuas $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, 3,$ $t \in T$, que son las componentes del vector $\vec{x} = \vec{x}(t)$.

Para que la curva X sea una curva simple de Jordán imponemos la condición de que $\vec{x}(t_1) \neq \vec{x}(t_2)$ si $t_1 \neq t_2$.

La aplicación f *es un homeomorfismo.*—Como es bien conocido, t es función de la posición del punto x que pertenece a la curva X y esta función $t(x)$ es continua. En efecto, si $t(x)$ no tendiese hacia $t_o = t(x_o)$ cuando $x \to x_o$, existiría una sucesión de puntos $\{x_p'$, $x_p \varepsilon X$, que tenderían hacia x_o y para los cuales $|t(x_p) - t_o| > \alpha > 0$. Los números $t(x_p) = t_p$ tendrían al menos un punto límite t', y entonces ocurriría que $|t' - t_o| \geqslant \alpha$.

A t' le correspondería x' distinto de x_o y, cuando t_p tiende hacia t', x_p

debería tender hacia x'. $t(x)$ es, pues, continua, y no solamente continua sino también uniformemente continua (1).

La curva X es un espacio homeomorfo al espacio T que tiene la topología de la recta real.

Si las funciones $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ admiten primeras derivadas continuas y acotadas sobre T, la curva X es rectificable. El intervalo T es el de extremos t_1 y t_2.

La función $F(t) = \int_{t_1}^{t} \sqrt{x'^2_1(t) + x'^2_2(t) + x'^2_3(t)}\, dt$ es continua, y tiene función inversa uniforme y continua, por lo que establece una correspondencia biunívoca y bicontinua entre los puntos de X y de T.

Hemos visto de nuevo que el espacio T es homeomorfo al X.

A partir de este momento consideraremos que las funciones $x_i = x_i(t)$ $i = 1, 2, 3$ admiten, en T, derivadas continuas y acotadas hasta el orden que se necesite.

Aclaración.—Si $\vec{v}$ es un vector, al punto extremo del vector lo designaremos por v.

3. Grupo topológico de automorfismos de un entorno del espacio topológico T

Teorema.—El conjunto P de las proyectividades hiperbólicas que tienen los puntos dobles fijos y característica positiva forman grupo y cada uno de los elementos del grupo transforma el segmento limitado por los puntos dobles en el mismo segmento.

Demostración: Si D_1 y D_2 son los puntos dobles y fijos de las proyectividades de P, evidentemente son dobles en la proyectividad producto de dos cualesquiera de P.

Si A y A′ son dos puntos homólogos de la proyectividad que tiene por dobles D_1 y D_2 tenemos que $|AA'D_1D_2| > o$ si A y A′ están en el $\left\{\begin{matrix}\text{interior}\\ \text{exterior}\end{matrix}\right.$ del segmento D_1D_2 y $|AA'D_1D_2| < o$ si uno de ellos está en el interior y otro en el exterior. Cuando $A \in \overline{D_1D_2}$ y $|AA\bar{D}_1D_2| > o$ $A' \in \overline{D_1D_2}$, ya que si $A' \in \overline{D_1D_2}$ $|AA'DD| < o$.

Si dos proyectividades de P tienen característica positiva, la proyectividad producto también la tiene, ya que transforma punto interior al segmento D_1D_2 en punto interior.

La transformación inversa también pertenece a P, y como en P tenemos incluida la identidad, resulta que P es un subgrupo del grupo de las proyectividades entre series rectilíneas.

Expresión analítica del grupo P.—Tomaremos como origen el punto medio del segmento $\overline{D_1D_2}$. Respectivamente, las abscisas de D_1 y D_2 serán $-h$ y h, y la de los puntos homólogos A y A′, z y z'.

---

(1) Valiron.—*Théorie des fonctions*. pág. 75.

Como $|AA'D_1D_2| = k$ (k es un número real, finito y mayor que cero) desarrollando resulta:

$$z' = \frac{-h(1+k)z + (1-k)h^2}{(1-k)z - h(1+k)}.$$

Para $k = 1$ obtenemos la identidad. La matriz asociada a estas proyectividades es

$$A = \begin{pmatrix} -h(1+k) & (1-k)h^2 \\ 1-k & -h(1+k) \end{pmatrix}$$

utilizando la matriz $\dfrac{1}{|A|}A$ podemos ver lo ya visto, que el conjunto de proyectividades P es un grupo.

$|A|$ es distinto de cero si k es un número finito mayor que cero y h es distinto de cero.

Si hacemos $z = t - t_0$ y $z' = t^* - t_0$ obtenemos que la expresión analítica de un grupo topológico de automorfismo del entorno $E^{t_0}_h$ $(t_0 - h, t_0 + h)$ viene dada por

$$\text{(I)} \quad t^* = t_0 + \frac{-h(1+k)(t-t_0) + (1-k)h^2}{(1-k)(t-t_0) - h(1+k)}$$

El grupo formado por estas transformaciones lo designaremos por $P^{t_0}_h$ y la transformación (I) la representaremos por $p^{t_0}_{hk}$.

Observaciones: $(p^{t_0}_{hk})^{-1} = p^{t_0}_{h(1/k)}$ y $p^{t_0}_{hk_1} \cdot p^{t_0}_{hk_2} = p^{t_0}_{h(k_1k_2)}$.

El grupo $P^{t_0}_h$ es topológico, pues evidentemente al conjunto de sus elementos podemos asociarle la topología que tiene todo subgrupo del grupo de las proyectividades entre series rectilíneas o la topología que resulta al asociar al elemento $p^{t_0}_{hk}$ el punto de la recta real de abscisa k, $0 < k < +\infty$. Es inmediato ver en este último caso que se cumplen el resto de las condiciones para que sea grupo topológico.

4. Grupo topológico de automorfismos de un entorno $V^{x_0}_h$ del espacio topológico X

Si al entorno $E^{t_0}_h$ de T le aplico f, obtenemos el entorno $V^{x_0}_h$ del punto x_0, $x_0 = f(t_0)$.

Por la composición de f y $P^{t_0}_h$ dada por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\Gamma^{x_0}_h"] \arrow[d, "f^{-1}"'] & x^* \\ t \arrow[r, dash, "P^{t_0}_h"'] & t^* \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \qquad x, x^* \in X \,;\; t, t^* \in T$$

queda definido $\Gamma^{x_0}{}_h$, que es un grupo topológico de automorfismos que actúan sobre el entorno $V^{x_0}{}_h$. Un elemento genérico de $\Gamma^{x_0}{}_h$ será el $\gamma^{x_0}{}_{hk}$. Al ir variando x_0 y h tenemos una familia de grupos topológicos doblemente indefinida.

Si hacemos corresponder a $p^{t_0}{}_{hk}$ el $\gamma^{x_0}{}_{hk}$, tenemos definido un isomorfismo entre los grupos $P^{t_0}{}_h$ y $\Gamma^{x_0}{}_h$, pero si a $\gamma^{x_0}{}_{hk}$ le ponemos en correspondencia con el $\gamma^{x^*{}_0}{}_{h^*k}$ tenemos definido otro isomorfismo entre los grupos $\Gamma^{x_0}{}_h$ y $\Gamma^{x^*{}_0}{}_{h^*}$.

Al vector $\vec{x} = \vec{x}(t)$ le corresponde el vector $\vec{x}^* = \vec{x}(t^*)$, t y t^* están ligadas por la relación (I).

5. El espacio fibrado tangente B[B, p, X, Y, G, φ] asociado a la curva X

La curva $\vec{x} = \vec{x}(t)$ define X, que es el espacio base del fibrado.

La fibra Y es el espacio E^1 (recta real).

B es un espacio homeomorfo al X $\times$ Y.

El homeomorfismo $\varphi : (X \times Y) \rightarrow B$ está definido de la manera siguiente:

$$\varphi(x,y) = (x,\ y\ |\vec{x}'(t)|) \quad , \quad x \varepsilon X \quad , \quad y \varepsilon Y \quad , \quad t = f^{-1}(x)$$

admitimos que $|\vec{x}'(t)| \neq o$.

B tiene una imagen en E^3, que es una superficie reglada desarrollable que tiene por arista de retroceso la curva X.

La imagen la podemos obtener utilizando la aplicación dada por la expresión

$$\vec{y}_x = \vec{x}(t) + y\ |\vec{x}'(t)|\ \vec{u}_1$$

$\vec{u}_1$ es el vector tangente unitario.

G, debido a que damos solamente el homeomorfismo φ, se puede reducir a la unidad, ya que $\varphi^{-1} \cdot \varphi$ es la unidad.

La proyección p hace corresponder a todos los puntos situados sobre una tangente de X su punto de contacto.

$$(x,\ y\,|\vec{x}'(t)|) \xrightarrow{p} x.$$

El fibrado homeomorfo a un fibrado producto que tenemos definido es un fibrado diferenciable.

Si queremos obtener fibrados que tengan la misma imagen en el espacio E^3 es suficiente tomar otros que obligan a sustituir el grupo estructural que tenemos por otro homeomorfo al L_1, que es el grupo formado por las matrices 1×1 de elementos reales.

En efecto, supongamos que T_1 y T_2 son intervalos tales que $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ y $T_1 \cup T_2 = T$ si $t \varepsilon T_1$ $t = t(u)$, si $t \varepsilon T_2$ $t = t(v)$. Ahora aparecen dos homeomosfismos φ_1 y φ_2.

Si $x \varepsilon f(T_1)$ de $(x\ y) \xrightarrow{\varphi_1} \left(x, y\,|x'(t)|\dfrac{dt}{du}\right)$ y cuando $x \varepsilon f(T_2)$ de $(x,y) \rightarrow$

$\overset{\varphi_2}{\rightarrow}\left(x, y\,|\vec{x}'(t)|\dfrac{dt}{dv}\right)$. φ_{1x} y φ_{2x} son respectivamente las transformaciones $\bar{y} = y\,|\vec{x}'(t)|\,\dfrac{dt}{du}$, $\bar{y} = y\,|\vec{x}'(t)|\dfrac{dt}{dv}$, y de aquí ya es inmediato ver lo dicho. Tendremos un espacio fibrado principal cuando la fibra sea el grupo topológico G, y entonces el grupo estructural es isomorfo al grupo L_1.

Para dar el homeomorfismo φ también podriamos utilizar $x_i(t)$, siempre que $x'_i \neq 0$.

6. Grupos topológicos de automorfismos de $p^{-1}(V^{x_0}{}_h)$, isomorfos a $\Gamma^{x_0}{}_h$ que nos transforma la fibral $p^{-1}(x)$ en la $p^{-1}(x^*)$

La transformación $H^{x_0}{}_{h,k,a}$ queda definida de la forma siguiente:

$$(x,\ |\vec{x}(t)|\ y) \longrightarrow (x^*,\ |\vec{x}'(t^*)|\ ya)$$

$$x,\ x^* \varepsilon V^{x_0}{}_h\ ;\ t, t^* \varepsilon E^{t_0}{}_h\ ;\ x^* = x^*\ [x,\ h,\ k]$$

Si llamamos G′ al grupo formado por las transformaciones

$$\bar{y} = \frac{|\vec{x}'(t^*)|}{|\vec{x}'(t)|}\, ay$$

(a es un número real arbitrario), vemos que la transformación $H^{x_0}{}_{h,k,a}$ es una de las obtenidas por medio de los grupos topológicos $\Gamma^{x_0}{}_h$ y G′.

Las transformaciones $H^{x_0}{}_{h,k,a}$ forman el grupo topológico $H^{x_0}{}_{h,a}$ que transforma fibral en fibral.

Si donde pone a, ponemos $\begin{cases} k \\ 1 \end{cases}$ tenemos los subgrupos

$$\begin{cases} H^{x_0}{}_{h,k} = G^{x_0}{}_h \\ H^{x_0}{}_{h,1} = \bar{G}^{x_0}{}_h \end{cases}$$

y si llamamos $\begin{cases} g^{x_0}{}_{h,k} \\ \bar{g}^{x_0}{}_{h,k} \end{cases}$ a uno de sus elementos, resulta que

$$\begin{cases} (g^{x_0}{}_{h,k})^{-1} = g_{h,{}^1/k} \\ (\bar{g}^{x_0}{}_{h,k})^{-1} = \bar{g}_{h,{}^1/k} \end{cases}$$

y que

$$\begin{cases} g^{x_0}{}_{h,k_1} \cdot g^{x_0}{}_{h,k_2} = g^{x_0}{}_{h,(k_1k_2)} \\ \bar{g}^{x_0}{}_{h,k_1} \cdot \bar{g}_{h,k_2} = \bar{g}^{x_0}{}_{h,(k_1k_2)} \end{cases}$$

Al poner en correspondencia $\begin{cases} g^{x_0}{}_{h,k} \\ \bar{g}^{x_0}{}_{h,k} \end{cases}$ con $\gamma^{x_0}{}_{h,k}$ vemos que los grupos topológicos $\begin{cases} G^{x_0}{}_h \\ \bar{G}^{x_0}{}_h \end{cases}$ y $\Gamma^{x_0}{}_h$ son isomorfos.

En la imagen del fibrado que tenemos en E^3 por $\left\{ \begin{array}{l} G x o_h \\ \overline{G} x o_h \end{array} \right.$ pasamos de

$$\vec{y}_x = x(t) + \vec{yx}'(t) \quad \text{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{y}_x{}^* = \vec{x}(t^*) + k\vec{yx}'(t^*) \\ \vec{y}_x{}^* = \vec{x}(t^*) + \vec{yx}'(t^*) \end{array} \right.$$

7. Prefascículo sobre un espacio topológico Z, para $\}u^z{}_h\{$ y fascículo correspondiente

Definimos el prefascículo $\}A^z{}_h \; u^z{}_h \; \omega^z\{$. $A^z{}_h$ es un grupo topológico de transformaciones unívocamente asociado a $U^z{}_h$.

El elemento de $A^z{}_h$ viene representado por $a^z{}_{hk}$.

Si h y z permanecen fijos, tenemos todos los elementos del grupo de la familia que actúa sobre el entorno $u^z{}_h$, que contiene el punto z que pertenece a Z.

Sobre el vacío actúa el grupo trivial definido por la unidad.

El entorno $u^z{}_h$ pertenece a un sistema $\}u^z{}_h\{$ de entornos de Z. Si z es fijo tenemos un subconjunto filtrante descendente de entornos que forman un conjunto dirigido.

La ordenación lineal es tal que $u^z{}_{h_1} \succ u^z{}_{h_2}$ si $h_1 > h_2$, y entonces $u^z{}_{h_1} \supset u^z{}_{h_2}$.

Dos grupos arbitrarios de la familia $A^z{}_h$ son isomorfos. Al elemento $a^z{}_{hk}$ le corresponde el $a^{z*}{}_{h^*k}$. ω^z representa a los isomorfismos: $\omega^z{}_{h_1h_2}$: : $A^z{}_{h_1} \to A^z{}_{h_2}$ para $h_1 > h_2$, de forma que $\omega_{h_2h_3} \cdot \omega_{h_1h_2} = \omega_{h_1h_3}$ si $h_1 > h_2 > h_3$, es decir que $u_{h_1} \supset u_{h_2} \supset u_{h_3}$.

Este prefascículo nos define un fascículo del cual vamos a determinar la hoja asociada al punto z, que es lo que nosotros necesitamos.

Para cada z tenemos que calcular el límite directo del sistema directo de grupos $\}A^z{}_h \; u_h{}^z \; \omega^z\{$ que es la hoja A_z, asociada al punto z, del fascículo.

$\Sigma A^z{}_h = \bigcup\limits_{k,k} a^z{}_{hk}$, ya que si $a^z{}_{hk}$ lo asociamos al punto (h,k), puede ocurrir que dos elementos $a^z{}_{hk}$ representen la misma transformación; pero no están en correspondencia con el mismo punto.

El grupo cociente $\Sigma A^z{}_h/R = A^z$ queda determinado por la relación de equivalencia R. Para que dos $a^z{}_{hk}$ sean equivalentes, respecto R, tiene que ocurrir que $\omega^z{}_{h_1h_2}(a^z{}_{h_1k_1}) = \omega^z{}_{h_2h_3}(a^z{}_{h_2h_2})$ si $h_1 > h_2 > h_3$; luego $k_1 = k_2$. Pertenecen a la misma clase los $a^z{}_{hk}$ que tienen las mismas z y k.

Este grupo A_z es isomorfo a uno cualquiera de los grupos de la familia $A^{z*}{}_h$ El isomorfismo hace que a $a^{z*}{}_{hk}$ le corresponda la clase $\}Q^z{}_{hk}\{$. Nos queda añadir que h y k son números reales finitos que cumplen la condición de que $h > o$ y $k > o$.

8. Diferencial coordenada de la curva X, respecto al fibrado B.

Si suponemos $Z = X$, que $A^{zo}{}_h$ es $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma^{xo}{}_h \\ G^{xo}{}_h \\ \overline{G}^{xo}{}_h \end{array} \right.$ y que $u^{zo}{}_h = V^{xo}{}_h$

tenemos definidos los prefascículos

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ \Gamma^{xo}{}_h, V^{xo}{}_h, \omega^{xo} \} \\ \{ G^{xo}{}_h, V^{xo}{}_h, \omega^{xo} \} \\ \{ \overline{G}^{xo}{}_h, V^{xo}{}_h, \omega^{xo} \} \end{array} \right.$$

$\left\{ \begin{array}{l} G^{xo}{}_h \\ \overline{G}^{xo}{}_h \end{array} \right.$ se calculan con $\Gamma^{xo}{}_h$ y la restricción de φ a $V^{xo}{}_h$.

Las hojas de los respectivos fascículos son $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{xo} \\ G_{xo} \\ \overline{G}_{xo} \end{array} \right.$

Los grupos Γ_{xo}, G_{xo} y $\overline{G}_{xo}$ son isomorfos.

$$\{ \gamma^{xo}{}_{hk} \} \approx \{ g^{xo}{}_{hk} \} \approx \{ \overline{g}^{xo}{}_{hk} \}$$

al ir variando k tenemos todos los elementos del grupo. Estos tres fascículos son puntualmente isomorfos, o sea son fascículos isomorfos con identidad en la base.

Intimamente ligados al punto x_o tenemos los grupos Γ_{xo}, G_{xo} y $\overline{G}_{xo}$. Dos diferenciales coordenadas de la curva X respecto al prefascículo $\{\Gamma^{xo}{}_h\ V^{xo}{}_h\ \omega^{xo}$ y respecto al fibrado tangente B, son G_{xo} y $\overline{G}_{xo}$ que son las hojas de dos fascículos puntualmente isomorfos.

9. Interpretación de los resultados obtenidos

Esta interpretación la hacemos en la imagen del fibrado situada en el espacio E^3, y lo que veremos en ella es la interpretación del grupo Γ_{xo} asociado al punto x_o y de los grupos $\overline{G}_{xo}$ y G_{xo} asociado a x_o, cuando la distancia máxima entre dos puntos de los entornos $V^{xo}{}_h$ tiende a cero.

Para hacer esto tenemos que dar a t el valor t_o, fijar k y hacer que h tienda a cero en las expresiones

$$t^* = t_o + \frac{-h(1+k)(t-t_o) + (1-k)h^2}{(1-k)(t-t_o) - h(1+k)} \quad , \quad \vec{x}^* = \vec{x}(t^*)$$

$$\vec{y}_x{}^* = \vec{x}(t^*) + yk\,\vec{x}'(t^*) \quad , \quad \vec{y}_x{}^* = \vec{x}(t^*) + y\vec{x}'(t^*)$$

$$t,\ t^* \text{ y } t_o \in E^{to}{}_h \quad ; \quad x,\ x^* y\ x_o \in V^{xo}{}_h \ ; \ o < k < +\infty \ ; \ h > o$$

que son las que determinan de manera efectiva los grupos Γ_{xo}, G_{xo} y $\overline{G}_{xo}$.

Si $t = t_0$ queda:

$$t_0{}^* = t_0 + ch \ , \ c = \frac{k-1}{k+1} \ , \ -1 < c < 1 \ , \ \vec{x}_0{}^* = \vec{x}(t^*{}_0)$$

$$\vec{y}_{xo}{}^* = \vec{x}(t_0{}^*) + y\, k\, x'(t_0{}^*) \ , \ \vec{y}_{xo}{}^* = \vec{x}\,(t_0{}^*) + y\vec{x}'(t_0{}^*)$$

Observación.—Todos los cálculos que hagamos con $\vec{y}_{xo}{}^* = \vec{x}(t_0{}^*) +$ $+ yk\vec{x}(t_0{}^*)$ para ver cómo actúa el grupo G_{xo}, podemos utilizarlos para estudiar lo que ocurre cuando actúa el grupo $\overline{G}_{xo}$, ya que únicamente hay que poner la unidad donde hay una k.

Modo de representar el grupo Γ_{xo}.

$$\vec{x}^*{}_0 = \vec{x}(t_0 + ch) = \vec{x}(t_0) + ch\, \vec{x}'(t_0) + \vec{O}(h^2)$$

$$\vec{x}^*{}_0 - \vec{x}_0 = chx'(t_0) + \vec{O}(h^2) \ , \ ch = t^*{}_0 - t_0 = \Delta t_0$$

el grupo puede quedar representado por la expresión $dx_0{}^* = x'(t_0)dt_0$ cuando $h \to o$.

No depende del elemento utilizado del grupo, ya que h tiende a cero de forma completamente arbitraria. Esto no es cierto si $c = o$, y entonces empleamos el elemento unidad del grupo.

Para pasar de $x_0{}^*$ a x_0 utilizamos una traslación «infinitesimal». La dirección de la traslación es la dada por la tangente en el punto x_0.

Modo de actuar el grupo G_{xo}.

De y_{xo} pasamos a $y_{xo}{}^*$ siendo $\vec{y}_{xo} = \vec{x}(t_0) + y\vec{x}'(t_0)$, $\vec{y}_{xo}{}^* = \vec{x}(t_0{}^*) +$ $+ \ yk\vec{x}'(t_0{}^*)$, pero

$$\vec{y}_{xo}{}^* = \vec{x}(t_0) + yk\, \vec{x}'(t_0) + ch\, [\vec{x}'(t_0) + yk\, \vec{x}''(t_0)] + \vec{O}(h^2)$$

$$y_{xo}{}^* - \vec{y}_{xo} = y(k-1)\, \vec{x}'(t_0) + ch\, [\vec{x}'(t_0) + yk\, \vec{x}''(t_0)] + \vec{O}(h^2)$$

si suponemos que el parámetro es el arco, es decir, si hacemos $t = s$, queda

$$\vec{y}_{xo}{}^* - \vec{y}_{xo} = [y(k-1) + \Delta s]\, \vec{u}_1 + yk \frac{1}{\rho} \vec{u}_2\, \Delta s + \vec{O}(\Delta s^2)$$

$\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, son, respectivamente, los vectores unitarios tangente y normal a la curva X.

La interpretación de G_{xo} cuando $h \to o$ es el paso de y_{xo} a $y_{xo}{}^*$, que se reduce a una traslación de dirección la tangente y a un giro «infinitesimal».

Modo de representar el grupo $\overline{G}_{xo}$.—Si seguimos con las hipótesis anteriores y hacemos $k = 1$, queda

$$y_{xo}{}^* - \vec{y}_{xo} = \vec{u}_1\, \Delta s + y \frac{1}{\rho} \vec{u}_2\, \Delta s + \vec{O}(\Delta s^2)$$

Si estudiamos cómo actúa el grupo $\overline{G}_{xo}$ sobre un punto situado en la tangente trazada en x_o y que dista la unidad del punto de contacto, queda

$$\vec{y}_{xo}{}^{*} - \vec{y}_{xo} = \vec{u}_1 \Delta s + \frac{1}{\rho} \vec{u}_2 \Delta s + O(\Delta s^2)$$

y el grupo $\vec{G}_{xo}$ podemos representarlo por la expresión única

$$d\vec{y}_{xo}{}^{*} = \vec{u}_1 ds + \frac{1}{\rho} \vec{u}_2\, ds.$$

Luego una interpretación de la diferencial en x_o para el $\overline{G}_{xo}$ y $t = s$, cuando sólo considero la actuación de $\overline{G}_{xo}$ en un punto particular de la fibra es $ds\, \vec{u}_1 + \frac{1}{\rho}\, ds\, \vec{u}_2$. Como habíamos indicado.