UNIFICACION POR EL ALGEBRA MODERNA

por

EMILIO PÉREZ CARRANZA

En el intento actual de renovar el estudio de la Matemática, es preocupación dominante la revisión de diversas teorías retrotrayéndolas a sus puntos de origen, no ya históricos, sino fundamentalmente lógicos.

Con ello se cree poder iluminar los orígenes de tales teorías para mejorar los métodos de sus desarrollos en doctrinas posteriores, rigorizando, además, la nomenclatura y simbología correspondientes.

Al mismo tiempo, se descubren analogías entre teorías que si nos parecen diferentes es por las concreciones materiales que adoptan. En cierto modo, pudiera afirmarse que tales concreciones son formas distintas de una misma estructura.

Tal idea, tan propia del actual pensamiento y tan útil por la economía que lleva consigo, se manifiesta claramente, según vamos a ver, en tres cuestiones diferentes que arrancan de una fórmula única que suele estudiarse en Algebra moderna y que establecemos a continuación por modo original.

Número de elementos de un conjunto unión.—Sea R un conjunto finito referencial del que son partes A, B, C, ...

Si A′ y B′ son los conjuntos complementarios respectivos de A y B en R, se tiene:

$$A \cup A' = R \qquad\qquad B \cup B' = R$$

De aquí sale:

$$(A \cup A') \cap (B \cup B') = R \cap R$$

de donde, desarrollando, sale:

$$(A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B') = R.$$

Pero, por otra parte, es

$$(A \cup B) \cup (A' \cap B') = R.$$

De estas dos últimas igualdades sale

$$(A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') = A \cup B$$

Designemos por x, y, z los números de elementos de anteriores conjuntos, según lo siguiente:

$$N(A \cap B) = x \qquad [1]$$

$$N(A' \cap B) = y \qquad\qquad N(A \cap B') = z$$

Siendo disjuntos estos conjuntos intersecciones, se tiene:

$$N(A \cup B) = x + y + z \qquad [2]$$

Ahora bien:

$$(A \cap B) \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap B = E \cap B = B$$

lo que implica:

$$x + y = N(B) \qquad [3]$$

y análogamente

$$x + z = N(A) \qquad [4]$$

Eliminando x, y, z entre [1], [2], [3] y [4] queda

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) \qquad [5]$$

Esta importante fórmula se intuye fácilmente mediante un sencillo diagrama de Euler (o de Venn).

Nótese que si A y B son disjuntos, su intersección es el espacio vacío, y resulta entonces el caso que se considera en Aritmética elemental al estudiar la suma.

La fórmula [5] se generaliza poniendo en ella $B = B_1 \cup C$, lo que da (quitando el subíndice 1):

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B \cup C) - N[A \cap (B \cup C)]$$

Pero

$$N(B \cup C) = N(B) + N(C) - N(B \cap C)$$

y además, como

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

resulta

$$N[A \cap (B \cup C)] = N(A \cap B) + N(A \cap C) - N(A \cap B \cap C)$$

Por tanto, sustituyendo, queda:

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - (N(B \cap C) - N(A \cap B) -$$

$$- N(A \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

Análogamente, mediante el principio de inducción de Bernoulli se obtiene la fórmula general

$$N(A \cup B \cup C \cup \dots \cup L) = \Sigma N(A) - \Sigma N A \cap B + \Sigma N(A \cap B \cap C) - \dots \dots \pm N(A \cap B \cap C \cap \dots \dots \cap L) \qquad [6]$$

Es de notar la imperfección de la notación empleada en [6], analoga a la que siguen los autores franceses en la teoría de funciones simétricas de las raíces de ecuaciones algebraicas. Nuestro empleo es debido a conveniencias tipográficas.

También conviene señalar la enorme dificultad de obtener esa fórmula [6] mediante un diagrama, cuando el número de conjuntos A, B, ..., L es grande.

A continuación se utiliza la fórmula [6] en tres cuestiones de diversa apariencia.

I. Probabilidad total.—Supongamos que los elementos del referencial R son resultados o *casos* de una experimentación efectuada. Consideremos un criterio que selecciona en R una parte S que llamaremos *suceso*, en la cual se distinguen a su vez partes A, B, C, ..., L de casos llamados *favorables* a S. Dichas partes A, B, ..., L no son necesariamente disjuntas y su unión es precisamente S.

Si designamos como anteriormente por N(S) el número de elementos del conjunto S y por N(R) el de R, resulta:

$$N(S) : N(R) = P(S)$$

es la probabilidad de realización del suceso S. Como este se puede realizar bajo las modalidades A, B, ..., L (en cierto modo sumandos de S), a dicha probabilidad se la llama *total*.

Dividamos por N(R) los dos miembros de [6] y resulta:

$$P(S) = \Sigma P(A \cap B) + \Sigma P(A \cap B \cap C) - \dots \dots \pm P(A \cap B \cap \dots \dots \cap L) \qquad [7]$$

que da la *probabilidad total* del suceso S.

Si A, B, ..., L fueran disjuntos, sus intersecciones serían el conjunto vacío y los números de sus elementos serían cero. Se recae entonces en la fórmula de la probabilidad total de un suceso que se realiza bajo formas incompatibles:

$$P(S) = P(A) + P(B) + \dots + P(L)$$

Esta es la fórmula que se considera exclusivamente en un primer estudio del Cálculo de Probabilidades.

La fórmula [7] permite resolver el conocido

PROBLEMA DE LAS COINCIDENCIAS.—*En una bolsa hay* n *bolas marcadas con los números* 1, 2, 3, ..., n. *Se van extrayendo sucesivamente las bolas y se pide calcular la probabilidad de que en cada extracción completa se realice al menos una coincidencia*; *esto es*: *que al menos alguna de las bolas salga con un número de orden igual al que lleva marcado.*

Designemos por R el conjunto de los $n!$ resultados o extracciones totales posibles y por S el de resultados en que al menos alguna de las bolas salga con el número de orden igual al que lleva.

Así el suceso S es la unión de A (conjunto de resultados o casos en que la bola 1 sale primeramente), de B (cuando la bola 2 sale en segundo lugar) y así sucesivamente.

Es claro que $A \cap B$ es el conjunto de casos en que las bolas 1 y 2 salen simultánea y respectivamente en primero y segundo lugares; y así sucesivamente.

Fácilmente resulta que siendo

$$N(A) = (n - 1)! \qquad N(R) = n!$$

es

$$P(A) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

y análogamente

$$P(B) = P(C) = \dots = P(L) = \frac{1}{n}$$

Luego

$$\Sigma P(A) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

Además,

$$P(A \cap B) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

y, por tanto,

$$\Sigma P(A \cap B) = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \binom{n}{2} = \frac{1}{2!}$$

Igualmente,

$$\Sigma P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \cdot \binom{n}{3} = \frac{1}{3!}$$

Finalmente,

$$P(A \cap B \cap \dots \cap L) = \frac{1}{n!}$$

Por consiguiente,

$$P(A \cup B \cup \dots \cup L) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots - \frac{(-1)^n}{n!}$$

La probabilidad del suceso contrario es, pues,

$$Q(S) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Es fácil reconocer que el segundo miembro de esta última fórmula es la suma de los n primeros términos de la serie que da e^{-1}. Y como esta serie es rápidamente convergente, tal número e^{-1} proporciona valores bastante aproximados de $Q(S)$ cuando n alcanza ciertos valores por lo que se escribe:

$$Q(S) \sim e^{-1} \qquad \text{de donde} \qquad P(S) \sim 1 - e^{-1}$$

Por ejemplo: si es $n = 10$, se tiene:

$$Q(S) = 0{,}36789\ldots, \qquad e^{-1} = 0{,}367879\ldots$$

lo que permite poner

$$P(S) = 0{,}632120\ldots$$

y de aquí este resultado notable:

En el problema de las coincidencias, la probabilidad de S es prácticamente constante (supuesto que n alcanza cierto valor): 0,63.

Y también este otro:

Repitiendo las extracciones completas de las n bolas de una bolsa, las frecuencias de no coincidencias dan valores aproximados de e^{-1}.

II. Indicador de un número.—Como es sabido, se llama *indicador* de un número natural m al número de números primos con m y no mayores que él. Se designa así: $\varphi(m)$.

Descompongamos m en producto de factores primos:

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots\ldots l^{\lambda}$$

En el conjunto

$$R = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ m-1,\ m\}$$

existen números primos con m (tales como 1 y $m - 1$) y su conjunto lo designamos por P.

El número de elementos de P es el indicador de m:

$$N(P) = \varphi(m)$$

El conjunto complementario de P en R es el Q, que puede considerarse como la unión de A (conjunto de los múltiplos de a), de B (conjunto de múltiplos de b), etc. Es claro que A, B, ... no son en general disjuntos.

Se tiene:

$$A = \left\{a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ \frac{m}{a}a\right\} \qquad \text{de donde} \qquad N(A) = \frac{m}{a}$$

Análogamente

$$N(B) = \frac{m}{b}\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ ,\ N(L) = \frac{m}{l}$$

y también

$$N(A \cap B) = \frac{m}{ab}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ N(A \cap B \cap \ldots \cap L) = \frac{m}{ab \ldots l}$$

Por tanto:

$$N(Q) = \left(\frac{m}{a} + \frac{m}{b} + \ldots + \frac{m}{l}\right) - \left(\frac{m}{ab} + \frac{m}{ac} + \ldots\right) + \left(\frac{m}{abc} + \ldots\right) -$$

$$- \ldots \pm \frac{m}{ab \ldots l}$$

Ahora bien; componiendo P y Q una partición de R, se tiene:

$$N(P) + N(Q) = N(R) = m$$

Luego,

$$N(P) = m - \left(\frac{m}{a} + \frac{m}{b} + \ldots + \frac{m}{l}\right) + \left(\frac{m}{ab} + \frac{m}{ac} + \ldots\right) -$$

$$- \left(\frac{m}{abc} + \ldots\right) + \ldots \pm \frac{m}{ab \ldots l}$$

Ahora bien: recordando las fórmulas de Vieta-Cardano relativas a las raíces de una ecuación, podemos poner

$$\varphi(m) = N(P) = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{l}\right)$$

o sea, con fácil transformación

$$\varphi(m) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \ldots l^{\lambda-1} (a-1)\,)b-1) \ldots (l-1)$$

III. Número de números primos no mayores que un número.—Para mayor sencillez resolvamos esta cuestión referida a un caso particular: cuando este último número es 100.

Puesto que la raíz cuadrada de 100 es 10, consideremos los números 2, 3, 5 y 7 primos y menores que 10.

En el conjunto

$$\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$$

consideramos sus partes

$$A = \text{múltiplos de } 2\}\ ,\ B = \dot{3}\}\ ,\ C = \dot{5}\}\ ,\ D = \dot{7}\}$$

La unión de A, B, C y D es el conjunto de los números múltiplos de 2, 3, 5 y 7 y menores que 100.

Ahora bien:

$$N(A) = 50, \quad N(B) = 33, \quad N(C) = 20, \quad N(D) = 14$$
$$N(A \cap B) = 16, \quad N(A \cap C) = 10, \quad N(A \cap D) = 7$$
$$N(B \cap C) = 6, \quad N(B \cap D) = 4, \quad N(C \cap D) = 2$$
$$N(A \cap B \cup C) = 3, \quad N(A \cap B \cap D) = 2, \quad N(A \cap C \cap D) = 1$$

Los demás números que hay que considerar al utilizar la fórmula [6] son nulos.

Luego,

$$N(A \cup B \cup C \cup D) = (50 + 33 + 20 + 14) - (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2) + + (3 + 2 + 1) = 78$$

El conjunto complementario de dicha unión tiene

$$100 - 78 = 22 \text{ números.}$$

Sumemos 4 a este número, pues se han contado los números 2, 3, 5 y 7 como si no fueran primos.

En conclusión, hay 26 números primos absolutos menores que 100.

Nota.—Este artículo ha sido sugerido por la enseñanza dada por el autor a sus alumnos de Preuniversitario en el Instituto Nacional de Enseñanza Media «San Isidro», de Madrid.