PANORAMA CONJUNTISTA DE LA MATEMATICA ELEMENTAL (*)

Por
JULIO GARCIA PRADILLO

Dentro del marco de eso que suele llamarse Matemática Moderna —y conste que a mí esa expresión no me gusta— ocupa un lugar destacado la teoría, de conjuntos. Cabría, pues, pensar que los conjuntos son algo añadido recientemente a la Matemática por una moda que puede pasar. Para ver que esto no es así queremos pasar revista al papel que juegan los conjuntos en lo que suele llamarse Matemática Elemental, pero advirtiendo que no sólo nos referiremos a los conjuntos ordinariamente considerados, que algunos llaman conjuntos copulativos, sino también a lo que esos mismos llaman conjuntos disyuntivos. Los distinguiremos mediante sendos ejemplos. Si decimos los números naturales dígitos son cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve, hemos citado un conjunto ordinario o conjunto copulativo. En cambio, si decimos el resultado obtenido al arrojar un dado puede ser uno, o dos, o tres, o cuatro, o cinco, o seis, hemos citado un conjunto disyuntivo. Los símbolos $\dot{m}$, $\pm$, $\leqslant$, $\geqslant$, tan usados en Matemáticas, son símbolos de otros tantos conjuntos disyuntivos, puesto que al decir, por ejemplo, que un número es múltiplo de 3, lo que afirmamos es que dicho número es 0, o 3, o 6, o 9, o ... Análogamente, cuando al resolver una ecuación de segundo grado escribimos

$$x = \frac{3 \pm 5}{2}$$

no se trata de que $x = 4$ y $x = -1$, como a veces suele escribirse, sino que escribimos abreviadamente que $x = 4$ o $x = -1$, etc. También las variables numéricas son conjuntos disyuntivos, puesto que al decir, por ejemplo, número natural nos referimos a cero, o uno, o dos, o tres, o ....

(*) Este artículo es casi reproducción exacta del trabajo presentado con el mismo título en el Cursillo de Profesores Adjuntos de Matemáticas, celebrado en Santander del 16 a 130 de agosto de 1963.

Precisando lo anterior, pasemos al objeto de nuestro tema.

El armazón matemático, tanto en Aritmética como en Geometría, está constituido, como es sabido, por *conceptos primitivos*, *postulados*, *definiciones*, *clasificaciones* y *teoremas*. Vamos a ocuparnos de ver el panorama conjuntista en cada una de esas partes del entramado matemático.

La Aritmética, al menos en una de sus posibles sistematizaciones, toma como conceptos primitivos los de *unidad* (elemento integrante de los conjuntos), *conjunto* y *correspondencia* (entre conjuntos).

La Geometría suele tomar, entre otros, como conceptos primitivos los de *punto*, *recta* y *plano*, y precisamente las rectas y los planos, como conjuntos de puntos, resultan ser subconjuntos del conjunto total de puntos existentes que es el espacio. De manera que designando por r *una* recta, por π *un* plano (y aquí tenemos otros dos ejemplos de conjuntos disyuntivos) y por E *el* espacio, podemos escribir:

$$r \subset E \quad , \quad \pi \subset E$$

Si pasamos al apartado de los postulados, el llamado «Postulado fundamental de la Aritmética» se refiere explícitamente a los conjuntos (finitos), estableciendo que «El número cardinal o número de elementos de un conjunto finito es independiente del orden en que se consideren sus elementos».

Y si es en Geometría, nos encontramos con los postulados que establecen que las rectas, los planos y el espacio son conjuntos infinitos de puntos, que en el espacio están contenidos infinitos planos y que en un plano están contenidas infinitas rectas. Otro postulado establece (utilizando la moderna nomenclatura) que la relación «ser anterior a» establecida en el conjunto de los puntos de cada recta es una relación de orden estricto, total, no bueno y sin primero ni último elemento. El mismo postulado, que suele llamarse de Euclides, podría enunciarse diciendo que «El conjunto de las rectas que pasan por un punto fijo y son paralelas a otra dada es un conjunto unitario».

En cuanto se refiere a las definiciones, suelen utilizarse dos clases: las definiciones nominales (ya sea de entes o de relaciones) y las definiciones por abstracción.

Las definiciones nominales de entes se realizan por el método clásico del género próximo y diferencia específica. Así decimos: «*Número primo* es un número natural que no tiene más divisores que él mismo y el número uno».

«Triángulo es un polígono de tres lados».

En estas definiciones lo que se hace es determinar un cierto subconjunto de un conjunto, mediante la enunciación de la propiedad característica de sus elementos. Así, en el primer ejemplo, dentro del conjunto, N, de los números naturales determinamos el subconjunto, P, de los números primos, $P \subset N$, por la propiedad de que cada número natural no ha de tener más divisores que él mismo y el número uno.

Es decir, si llamamos p a un número primo y n a un número natural,

$$p \in \mathrm{P} \Longleftrightarrow \begin{cases} p \in \mathrm{N} \\ n \nmid p \end{cases} \text{para } n \neq 1 \text{ y } p$$

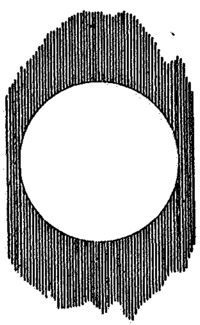
En el segundo ejemplo dentro del conjunto de los polígonos, P, determinamos el subconjunto constituido por los triángulos, T, por la propiedad característica de tener sólo tres lados. Es decir, si llamamos t a un triángulo y p a un polígono,

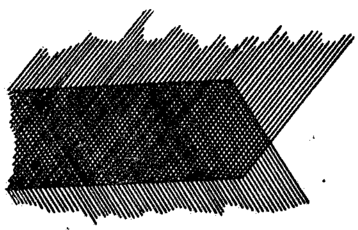
$$t \in \mathrm{T} \rightarrow \begin{cases} t \in \mathrm{P} \\ t \quad \text{tiene tres lados.} \end{cases}$$

En particular, en Geometría, es muy interesante la definición de ciertas figuras geométricas (conjuntos de puntos) teniendo en cuenta las nociones de complementario de un conjunto respecto a otro y de reunión o intersección de conjuntos.

Veamos unos ejemplos relativos a figuras de un solo plano:

«*Anticírculo* es la reunión de una circunferencia y el complemento respecto a plano de su círculo correspondiente.»





Por otra parte, cuando decimos «un segmento rectilíneo es la parte de recta comprendida entre dos de sus puntos», si éstos son A y B, nos referimos en la ordenación natural, en la que A es anterior a B, a los puntos de la recta que son posteriores a A y anteriores a B, pero los puntos de la recta posteriores a A constituyen la semirrecta de origen A que pasa por B, y los anteriores a B la semirrecta de origen B que pasa por A; luego resulta que «*un segmento restilíneo* es la intersección de dos semirrectas de una misma recta, tales que cada una de ellas contiene al origen de la otra».

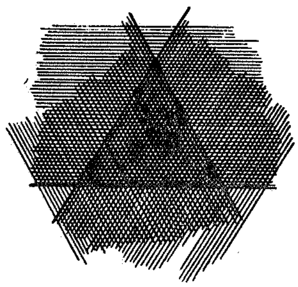
Análogamente tenemos que:

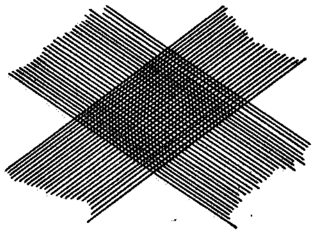
«*Una banda* es la intersección de dos semiplanos de bordes paralelos, y tales que cada uno de ellos contiene al borde del otro.»

«*Un ángulo convexo* es la intersección de dos semiplanos de bordes secantes.»

«*Un ángulo cóncavo* es la reunión de dos semiplanos de bordes secantes.»

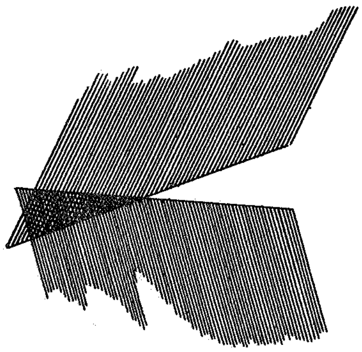
También un *polígono convexo* puede definirse de manera sencilla

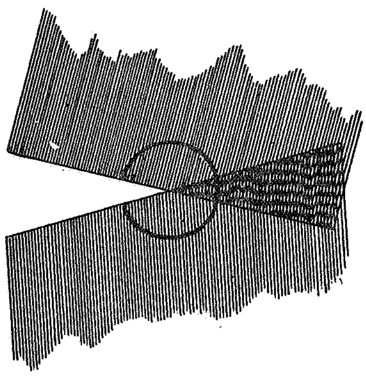




como intersección de semiplanos, aunque la expresión gramatical de esa definición resulte algo complicada:

«Dados *n* puntos ($n \leqslant 3$) A_1, A_2, ..., A¿ tales que no haya más de dos en la misma recta y tales que las rectas A_1A_2, ..., $A \ldots A_{n-1}$, A_nA_1: que unen cada uno con el siguiente y el último con el primero, dejan a los demás en un mismo semiplano, se llama *polígono convexo* a la inter-





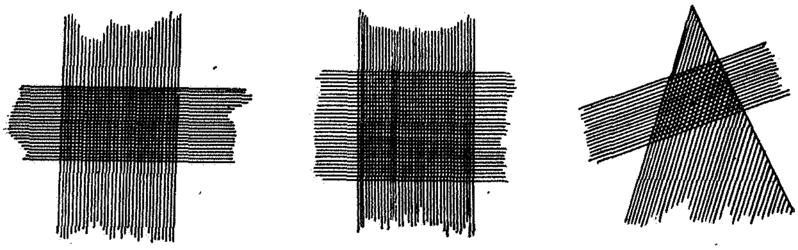
sección de los semiplanos de bordes A_1A_2, ..., $A \ldots A_{n-1}$, A_nA_1 que contienen a todos los puntos dados.»[5]

Utilizando la noción de banda ya indicada, se pueden definir así, «paralelogramo», «rectángulo» y «cuadrado».

«*Un paralelogramo* es la intersección de dos bandas de bordes secantes.»

«*Un rectángulo* es la intersección de dos bandas no congruentes y de bordes perpendiculares.»

«*Un cuadrado* es la intersección de dos bandas congruentes y de bordes perpendiculares.»

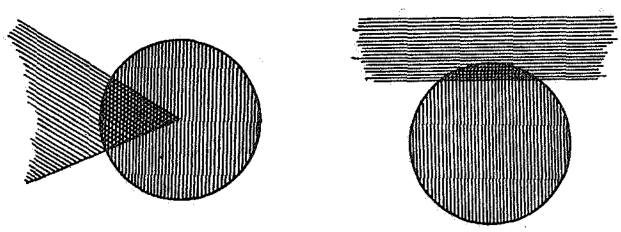


También puede definirse:

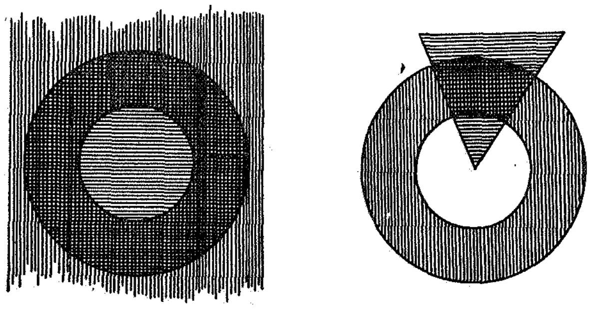
«*Un trapecio* es la intersección de una banda y un ángulo convexo tales que los bordes de la banda corten a los lados del ángulo en puntos distintos del vértice.»

«*Un sector circular* es la intersección de un círculo y uno de sus ángulos centrales.»

«*Un segmento circular* es la intersección de un círculo y un semiplano de borde secante a aquél.»



«*Una corona circular* es la intersección de un círculo y un anti-círculo concéntricos, siendo el radio del círculo mayor que el del anti-círculo.»



«*Un trapecio circular* es la intersección de una corona circular y uno de sus ángulos centrales.»

De manera análoga pueden definirse algunas figuras del espacio tales como *diedro convexo, diedro cóncavo, zona espacial* (llamamos así a la intersección de dos semiespacios de bordes paralelos, y tales que cada uno de ellos contiene al borde del otro), *paralelepípedo, ortoedro, cubo*, etc.

También en definiciones aritméticas juegan un papel importante las operaciones con conjuntos. Así tenemos dos de las más importantes definiciones relativas a números naturales:

«*Suma de dos números naturales*, a y b, es el número de elementos o número cardinal del conjunto reunión de dos conjuntos disjuntos, el primero de a elementos y el segundo de b elementos.»

«*Producto de dos números naturales*, a y b, es el número de elementos del conjunto producto de dos conjuntos, el primero de a elementos y el segundo de b elementos.»

En otras ocasiones, tanto en Aritmética como en Geometría o en cualquier otra rama matemática, lo que se define no es un ente sino una relación entre dos entes. Ejemplos:

«*Un número natural se dice que es múltiplo de otro b*, si x es igual a b multiplicado por otro número natural.»

«*Dos rectas se dice que son paralelas* cuando están en un mismo plano y no tienen ningún punto común.»

En estos casos, lo que se ha hecho es seleccionar dentro de un conjunto producto un cierto subconjunto.

Así, en el primer ejemplo, en el conjunto N $\times$ N, se ha considerado el subconjunto M constituido por los pares (x,b), tales que

$$(x,b)\varepsilon \mathrm{M} \Longleftrightarrow x : b \varepsilon \mathrm{N}$$

Análogamente, si es ρ el conjunto de las rectas del espacio, en el conjunto $\rho \times \rho$ consideramos el subconjunto M constituido por los pares (x,y), tales que

$$(x,y)\varepsilon \mathrm{M} \begin{cases} x \cap y = \phi \\ x \text{ e } y \text{ están en un mismo plano.} \end{cases}$$

Los ejemplos podrían multiplicarse. Así se definen en Aritmética las relaciones de «ser divisible por», «ser factor de», «ser divisor de», «ser primos entre sí», etc., y en Geometría las de «ser perpendiculares» relativa a rectas, y «ser adyacentes», «ser opuestos por el vértice», «ser contiguos», «ser complementarios», «ser suplementarios».

También en el caso de definiciones de relaciones geométricas puede ser interesante la utilización de los conceptos de reunión, intersección, etcétera. Por ejemplo, podemos definir:

«*Dos ángulos se dice que son adyacentes* si son las intersecciones de un mismo semiplano con dos semiplanos opuestos de borde secante al de aquél.»

«*Dos ángulos se dice que son opuestos por el vértice* si son intersecciones de semiplanos respectivamente opuestos.»

Otro tipo de definiciones son las llamadas *definiciones por abstracción*, pero antes de tratar de ellas queremos ocuparnos de otro apartado que citamos al principio: las clasificaciones, tan usadas no sólo en Matemáticas sino en las más diversas ciencias.

Respecto a las *clasificaciones* recordaremos en qué consiste una clasificación.

«Se dice que se ha hecho una *partición* en un conjunto C, o que se ha hecho una *clasificación* de sus elementos, cuando se consideran en C varios subconjuntos, llamados *clases,* tales que:

1.º Todo elemento de C pertenece a alguno de dichos subconjuntos.
2.º Ninguno de los subconjuntos es vacío.
3.º Dos cualesquiera de los subconjuntos son disjuntos.
En consecuencia se verifica también:
4.º La reunión de todas las clases es el conjunto C.»

Es muy importante enseñar a los niños a hacer clasificaciones. No es raro, por ejemplo, oír que los ángulos se clasifican en rectos, agudos, obtusos, adyacentes, opuestos por el vértice, complementarios y suplementarios o cosas por el estilo.

El que varios subconjuntos de un conjunto dado constituyan una partición de él o no, depende simplemente del cumplimiento de las condiciones antedichas y ese cumplimiento ha de verificarse teniendo en cuenta las definiciones dadas. Por ejemplo si se define:

«*Paralelogramo* es un cuadrilátero convexo cuyos lados opuestos son paralelos.»

«*Trapecio* es un cuadrilátero convexo que tiene dos y sólo dos lados paralelos.»

«*Trapezoide* es un cuadrilátero convexo que no tiene lados paralelos.» Podemos decir que los *cuadriláteros convexos* se clasifican en *paralelogramos, trapecios* y *trapezoides.* En cambio, si conservando las definiciones primera y segunda sustituimos la segunda por la siguiente, que a veces suele darse:

«*Trapecio* es un cuadrilátero convexo que tiene dos lados paralelos.» Sin prejuzgar lo que ocurra con los otros dos, entonces podríamos decir que los *cuadriláteros convexos* se clasifican en *trapecios* y *trapezoides,* ya que todo paralelogramo es un trapecio.

Una *partición* de un conjunto permite considerar una *relación de equivalencia* en él, en la que el criterio de equivalencia es la pertenencia a la misma clase.

Recíprocamente, una *relación de equivalencia* definida en un conjunto C lleva consigo una *partición* de dicho conjunto, si se consideran de la misma clase los elementos equivalentes y de clases distintas los no equivalentes.

De la mano de las relaciones de equivalencia y de las particiones llegamos a la consideración de las *definiciones por abstracción* y de las *cualidades.*

Es posible que en un mismo conjunto C se puedan definir *distintas relaciones de equivalencia.* Para distinguir unas de otras crea nuestra mente otros tantos conceptos, *otras tantas cualidades* atribuidas a todos los elementos del conjunto C, y ello del siguiente modo:

«Cuando en un conjunto se ha definido una *relación de equivalenaic* crea nuestra mente, para atribuir a todos los elementos *equivalentes*, un algo común: *un mismo valor*.

Si la *relación de equivalencia*, R, ha permitido la *partición* del conjunto C, en las clases C_1, C_2, ..., C_n, ..., a los elementos de estas clases las atribuimos respectivamente otros tantos *valores:*

$$x_1 \, x_2 \ldots\ldots x_n$$

Los diversos *valores* x_1, x_2, ..., x_n, ..., dan origen a otro concepto más amplio, X, que es el *conjunto disyuntivo de esos valores*, o sea x_1 o x_2 o ... o x_n o ..., y que es lo que llamamos *cualidad*. Y esos distintos *valores* se suelen llamar *estados particulares de esa cualidad*.

Los elementos a_1, b_1, c_1, ..., de la Clase C_1, decimos que son *representantes* del valor x_1 común a todos ellos.

Resulta, pues, que:

«*Una cualidad* es un algo atribuible a los elementos de un conjunto cuando en él se ha definido una *relación de equivalencia*.»

«Se atribuye un mismo *estado particular de la cualidad* a los elementos equivalentes respecto a dicha relación, y *estados particulares* distintos a los elementos no equivalentes.»

O de otra manera:

«*Una cualidad* es un algo atribuible a los elementos de un conjunto cuando en él se ha realizado *una partición*.»

«Se atribuye un mismo *estado particular* a los elementos de la misma clase, y *estados particulares* distintos a los elementos de distinta clase.»

Cada cualidad en particular se dice que ha quedado *definida por abstracción* al establecer en el conjunto en cuestión la relación de equivalencia o al efectuar su partición.

Ejemplos de cualidades son el *caso gramatical* atribuible a los elementos del conjunto de los nombres, adjetivos y pronombres, la *conjugación* atribuible a los elementos del conjunto de los verbos. En particular, en Matemáticas se consideran, entre otras, las siguientes cualidades:

Número natural atribuible a los elementos del conjunto de las colecciones respecto a la relación de *coordinación*. Sus estados particulares son cero, uno, dos, ...

Número entero atribuible a los elementos del conjunto $N_0 \times N_0$ respecto a la relación de *equidiferencia*.

Número racional, número real, número complejo, longitud, extensión superficial, extensión corporal, forma.

Paridad, atribuible a los elementos de N_0 respecto a la relación de *congruencia respecto al módulo* 2. Sus estados particulares suelen llamarse *paridad par* y *paridad impar*, o bien *paridad en sentido estricto* e *imparidad*.

Durección atribuible a los elementos del conjunto de las rectas del espacio euclídeo respecto a la relación de *paralelismo generalizado*. Sus estados particulares no reciben nombres especiales, sino que se dice, por ejemplo, dirección de la recta *r*.

También podría hablarse, por ejemplo, de *equilateralidad* atribuible a los elementos del conjunto de los triángulos respecto a la relación *tener el mismo número de lados iguales*. Sus estados particulares podrían llamarse *equilateralidad total* (correspondiente a los triángulos equiláteros), *equilateralidad parcial* (correspondiente a los triángulos isósceles) y *equilateralidad nula* (correspondiente a los triángulos escalenos).

En particular, entre las cualidades se encuentran las magnitudes.

¿Cuándo decimos que una cualidad es magnitud?

Para contestar a esta pregunta precisamos una nomenclatura que nos permita abreviar el lenguaje:

«Si en un conjunto C se ha definido una *relación de equivalencia*, se dice que se ha definido *una suma* asociada a aquella si a cada par ordenado de elementos de C se le ha hecho corresponder uno o varios, llamados *suma*, tales que:

1.º Cualesquiera que sean a y b,

$$\left.\begin{array}{l} a' \sim a \\ b' \sim b \end{array}\right\} \rightarrow a' + b' \sim a + b.$$

2.º Cualesquiera que sean a y b,

$$b + a \sim a + b.$$

3.º Cualesquiera que sean a, b y c,

$$(a + b) + c \sim a + (b + c).$$

4.º Existe uno o varios elementos, llamados elementos nulos, 0, tales que cualquiera que sea a

$$a + 0 \sim a.$$

Pues bien, diremos que:

«*Una magnitud* es una *cualidad* atribuible a los elementos de un conjunto cuando entre sus elementos no sólo se ha definido una relación de equivalencia, sino también una suma asociada a ella.» «Los estados particulares de una magnitud se llaman *cantidades*.»

Por ejemplo, si en el conjunto de los segmentos nulos o no del espacio euclídeo consideramos la relación de equivalencia *congruencia* y damos las siguientes definiciones:

Segmentos adyacentes son los que están en una misma recta y tienen por intersección un punto;

Suma de dos segmentos adyacentes es su reunión o cualquier segmento congruente con ella;

Suma de dos segmentos cualesquiera es una suma de dos segmentos adyacentes y congruentes con aquéllos,

resulta que a los elementos del conjunto de los segmentos rectilíneos puede atribuirse una cualidad que es magnitud, y que en este caso particular recibe el nombre de *longitud*. Los estados particulares de esta magnitud se llaman *cantidades de longitud*.

Las cantidades de una misma magnitud se llaman, como es sabido, homogéneas. Entre ellas se puede definir la suma de la manera siguiente:

Suma de dos cantidades homogéneas, a y *b*, es la cantidad correspondiente a un elemento suma de uno que tenga la cantidad *a* y otro que tenga la cantidad *b*.

Por ejemplo, *suma de dos cantidades de longitud* A y B, es la cantidad de longitud de un segmento suma de uno que tenga la cantidad de longitud A y otro que tenga la cantidad de longitud B.

La suma de cantidades homogéneas es siempre *uniforme, conmutativa, asociativa* y *con elemento neutro único.*

En cuanto se refiere al apartado de los teoremas simplemente diremos que algunos de ellos determinan la inclusión de un conjunto en otro, incluso la coincidencia con otro. Así, el teorema de Pitágoras: «En un triángulo rectángulo, el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos», determina la inclusión del conjunto de los triángulos rectángulos en el conjunto de los triángulos en los que el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. En este caso, como el teorema recíproco es cierto también, el segundo conjunto está incluido en el primero, y, por tanto, según la propiedad antisimétrica de la inclusión, ambos coinciden. Naturalmente, no siempre sucede así. Por ejemplo, el teorema «todo múltiplo de 9 es múltiplo de 3» determina la inclusión del conjunto de los múltiplos de 9 en el conjunto de los múltiplos de 3, pero como el teorema recíproco no es cierto, tampoco es cierto que el conjunto de los múltiplos de 3 esté incluido en el conjunto de los múltiplos de 9.

Por último, queremos señalar que diversos capítulos de la Matemática, incluidos de ordinario en lo que suele llamarse matemática elemental, están íntimamente ligados con la teoría de conjuntos. Así, en la Combinatoria se trata, por ejemplo, de las combinaciones (partes de un conjunto finito), de las permutaciones (ordenaciones totales de un conjunto finito), de las variaciones (ordenaciones totales de las diversas partes de un conjunto finito), etc.

Por otra parte, la Estadística, por lo menos en parte, trata de inducir de las propiedades de un cierto subconjunto (muestra), las del conjunto total (colectivo).

En el Cálculo de Probabilidades, los clásicos teoremas de la probabilidad total y de la probabilidad compuesta, se demuestran con toda claridad utilizando los diagramas de Venn relativos a conjuntos.

La misma Teoría de Funciones se ocupa de correspondencias entre conjuntos. Y así podríamos continuar poniendo ejemplos.